

Q. (標準問題精講 3 p114 標問 49)

解説の補助をお願いします。

A. いつも見ている微分の問題と違うのは、速度や加速度は大きさだけでなく向きもあるベクトル量であるため扱いが少し異なってくるという点です。これを踏まえると、この問題のポイントは

- ・ 曲線を進むので P の速度ベクトル \vec{v} は P での接線の傾き方向
- ・ 座標 \rightarrow (微分) \rightarrow 速度 \rightarrow (微分) \rightarrow 加速度
- ・ 速度や加速度はベクトル量だが、微分するときは x 成分 y 成分に分解してそれぞれについて微分する

になります。

(1)

\vec{a} は \vec{v} を x 成分、y 成分に分解してそれぞれについて微分したものであるから

$$\left(-V \sin \theta \frac{d\theta}{dt}, V \cos \theta \frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= \left(-V \sin \theta \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(V \cos \theta \frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ &= V^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ &= V^2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \end{aligned}$$

点 P における速度 \vec{v} の傾きは $\frac{\vec{v} \text{ の } y \text{ 成分}}{\vec{v} \text{ の } x \text{ 成分}} = \frac{V \sin \theta}{V \cos \theta} = \tan \theta$

曲線 $y = \sin x$ の接線について考えると、 $y' = \cos x$ より $P(x, \cos x)$ での接線の傾きは $\cos x$ によって $\tan \theta = \cos x$

(2)

(1) で $|\vec{a}|^2$ が t によって変わる変数 θ の式で表されたので、これを利用して t を動かしたときにどのように変化するかを調べます。

$|\vec{a}|^2 = V^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ より、 V は定数なので $\frac{d\theta}{dt}$ が最大になるときに $|\vec{a}|$ も最大になることがわかります。ただし、問題の設定で変数は $y = \sin x$ 上を動く点 P なので、変数 θ と t が x を動かしたときにどのように変化するかを調べる必要があります。

ここで、(1) で求めた $\tan \theta = \cos x$ の関係を使います。 $\frac{d\theta}{dt}$ の形がほしいので、両辺を

$$t \text{ で微分して } \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\sin x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sin x \cos^2 \theta \frac{dx}{dt} \text{ 両辺二乗して}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \sin^2 x \cos^4 \theta \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \dots \textcircled{1}$$

ここで、右辺の変数が θ と x と t と 3 つになってしまうので、 $\frac{dx}{dt}$ の部分を θ で表したい

と考えます。まず、 $\tan \theta = \cos x$ より $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \tan^2 \theta \dots \textcircled{2}$

加えて、座標 \rightarrow (微分) \rightarrow 速度 \rightarrow (微分) \rightarrow 加速度の関係を用いて

$$\frac{dP_x}{dt} = \vec{v}_x \text{ だから、 } \frac{dx}{dt} = V \cos \theta \dots \textcircled{3}$$

これら $\textcircled{2}\textcircled{3}$ を $\textcircled{1}$ に代入して

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = (1 - \tan^2 \theta) \cos^4 \theta (V \cos \theta)^2 \text{ これで、変数が } \theta \text{ だけになりました。あとは、三}$$

角関数の性質を利用してこの最大値を求めていきます。sin, cos, tan のどれで統一してもよいのですが、 $\cos^2 \theta$ の形があることなどから変形しやすい $\tan \theta$ で統一していきます。

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = (1 - \tan^2 \theta) \cos^4 \theta V^2 \cos^2 \theta$$

$$= V^2 (1 - \tan^2 \theta) \cos^6 \theta \qquad \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \text{ より}$$

$$= V^2 \frac{1 - \tan^2 \theta}{(1 + \tan^2 \theta)^3}$$

$$|\vec{a}|^2 = V^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \text{ に代入して}$$

$$= V^4 \frac{1 - \tan^2 \theta}{(1 + \tan^2 \theta)^3} \dots \textcircled{4}$$

$\tan \theta = \cos x$ より $-1 \leq \cos x \leq 1$ だから $0 \leq \tan^2 \theta \leq 1$

$\textcircled{4}$ の右辺について、分母は常に正より $0 \leq \tan^2 \theta \leq 1$ のときの分子を考えると $\tan^2 \theta$ の減少関数となる。

よって $\tan^2 \theta$ が最小のときに最大値をとるから、 $\tan \theta = 0$ のときに $|\vec{a}| = V^2$ が最大値となる。

この問題は、ポイントとなるところがたくさんあり、非常に難しいと思います。最初に書いた 3 つのポイントに加えて、変数が複数あるときの最大値、最小値の求め方について

でも注意してください。この問題では $\tan\theta = \cos x$ の関係によって変数 θ と x の間で相互関係ができます。最大値最小値を求める際は変数が一種類になる方が考えやすいので、こうした関係を使って式を整理していきます。