Q．（基礎問題精講 2B P200 例題 130）
解説の補助をお願いします。

A．数列をある決まりに従って分割してつくられる数列を、群数列と言います。

群数列では、**各群の最初の項と最後の項が第何項にあるかを考えること**が根本になります。そのために各群にそれぞれ項が何個あるか見てみると、
第 1 群には項が 1 個(1)
第 2 群には項が 2 個(2,3)
第 3 群には項が 4 個(4,5,6,7)
第 4 群には項が 8 個(8,9,10,11,12,13,14,15)…
となっています。このことから、

第k群(k:自然数)には項が2^{k-1}個ある　―(A)

ということが分かります。**各群の項の数**を数列として書き出すと

$$1\,,2^1,2^2,2^3,\dots,2^{k-1}$$

これは初項が 1、公比が 2 の**等比数列**となっています。

$$1\,|\,2\,,3\,|\,4\,,5\,,6\,,7\,|\,8\,,9\,,10\,,11\,,12\,,13\,,14\,,15\,|\,16\,,\dots|\,\dots|\bigcirc,\dots,\bigcirc|$$

←第 1 群　←第 2 群　←第 3 群　←第 4 群　←第 5 群　←第k群

まず第k群の最後の項は第何項なのかを調べます。**第k群までに項が全部で何個あるかを求めることで分かります。**第 1 群、第 2 群、第 3 群、…、第k群の項の数をそれぞれ足すことで求められますから、

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}$$

を求めればよいことになります。これは初項が1、公比が2の等比数列の和なので、

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{k-1}=\frac{1(1-2^k)}{1-2}=2^k-1\quad\text{―(B)}$$

…, ●| ●, …

第$(k-1)$群の終わり↑　↑第k群の始まり

1 足す

次に、第k群の最初の項は第何項なのかを調べます。
第$(k-1)$群までの項の数に **1 を足す**ことで分かります。
第k群までの項の数が(2^k-1)個だったので、
第$(k-1)$群までの場合は$(2^{k-1}-1)$個です。これに 1 を足して

$$(2^{k-1}-1)+1=2^{k-1} \quad \text{—(C)}$$

これより、この群数列について以下のことが分かりました。

第n群の最初の項	**第n群の最後の項**	**第n群に含まれる項の数**
(C)より	(B)より	(A)より
第2^{n-1}項	第(2^n-1)項	2^{n-1}個
(1)の答え		(2)の答え

この数列は$a_n=n$ということで、項の番号と項の値が同じです。したがって各群の最初の項と最後の項の**値**は以下のようになります。

第n群の最初の項	**第n群の最後の項**
2^{n-1}	2^n-1

(3)
次に 3000 が第何群の何番目にあるかを求めます。
考え方は、3000 が第i群の中にあるとすれば、

3000 は第i群の最初の項と最後の項の間にある

と見ることです。第i群の最初の項の値は2^{i-1}、最後の項の値は2^i-1なので、

$$2^{i-1} \leqq 3000 \leqq 2^i-1$$

を満たすということです。これを満たすiを求めるために、iに 1 から順に数字を入れていくと、$i=12$とすると、

$$2^{12-1} \leqq 3000 \leqq 2^{12}-1$$
$$\Leftrightarrow 2048 \leqq 3000 \leqq 4095$$

となって不等式を満たします。これより 3000 は第 12 群にあることが分かります。

$$\ldots, 2047 \mid 2048, 2049, 2050, \ldots, 3000, \ldots, 4095 \mid 4096, \ldots$$

第11群　　　　　　　　　　第12群　　　　　　　　　　第13群

第 12 群の最初の項は$2^{12-1}=2048$です。したがって第 11 群の最後の項は 2047 ですので、$3000-2047=953$
以上より、3000 は第 12 群の 953 番目にあります。
群数列問題は以下の問題で構成されていることがよくあります。
・各群の項の数はいくつか？
・各群の最初の項と最後の項は何か？
・(ある数)は第何群の何番目にあるか？

上の表のように、**各群の最初の項は第何項か？また最後の項は第何項か？各群に項がいくつあるか？の 3 つの情報を調べる**ことができれば、上の問題に全て対応することができます。この問題では小問(1)(2)によってこの 3 つの情報を調べるように誘導していますが、この小問が無くとも群数列問題を見たらまず 3 つの情報を求めにかかるようにしましょう。