

Q. (標準問題精講 3 p51 演習 19-2)

解説の補助をお願いします。

A. まずは図を正確に書くことが大切です。

半径 1 の円に外接する半径 $1/n$ の円を三個ほど書いてみましょう。

今回の問題では a_n/n の極限を求めるのですが、このままだと情報を極限に反映させることができません。そこで、 a_n の定義を式に反映させたいと考えます。

その際に円の個数と $\angle POQ$ が密接な関係にあることが気付けると第一段階突破です。 a_n の定義から、外接円はちょうどぴったり外接するとは限らず少しスペースが余ってしまう場合についても注目して不等式を立てます。不等式を立てる際に、はさみうちの原理がはじめから見えていると考えやすかったと思います。

不等式が立ったあとは $n \theta_n$ の極限さえわかればはさみうちで解決です。

これを考える際に $\sin \theta_n$ を経由するというのが二つ目の関門です。 θ_n と $\sin \theta_n$ には常に $n \rightarrow \infty$ において $\sin \theta_n / \theta_n = 1$ という関係式が成り立っていることが思いつければ、 \sin を経由する発想は出てくるはずで、 $\sin \theta_n$ は簡単に n を用いて表せるので $n \theta_n$ の極限もわかり、はさみうちで答えまでたどり着けます。