Q．（基礎問題精講 2B　例題 124）
解説の補助をお願いします（二項間漸化式の問題全般の解き方とパターン分類について）。

A. 二項間漸化式を解くうえで大切なのは、その問題がどの型になっているかを判断し、そのパターンにあった適切な方法で解いていくことです。漸化式の型を判断するためには何が変数で何が定数かを見極めることが必要です。
以下、それぞれの型の漸化式の解き方について説明していきます。長いので、解いている問題がどのパターンになるか判断してその部分の説明だけ読んでください。

まず、「漸化式を解く」とは$a_n = (n\textit{を含む関数})$の形にすることを言います。このa_nが一般項です。

一番シンプルな漸化式は次の二つです。
①等差数列型：$a_{n+1} = a_n + r$
②等比数列型：$a_{n+1} = qa_n$
それぞれ公式に当てはめれば一般項a_nを一発で求められると思います。
実は、ほとんどの漸化式の問題がこの二つの型に帰着できます。

③$a_{n+1} = pa_n + r$　型
次に①②が少し進化したものとして
$a_{n+1} = pa_n + r$　型があります。
等差数列と違うのは、a_nに係数がついているため、二項間（$a_{n+1} - a_n$）が等差にならないところです。また r があるため等比数列でもありません。
この形は$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$となるようなαを特性方程式によって求め、
$b_n = (a_n - \alpha)$の等比数列型として解きます。（→例題１２３参照）

④階差数列型：$a_{n+1} = a_n + b_n$
これは、$a_{n+1} = a_n + f(n)(\leftarrow n\textit{を含む関数})$　Ex. $a_{n+1} = a_n + n$　の形になっています。
これは二項間の差が n の関数で表わされるので、初項からa_nまでそれを足していくことで一般項を求めます。（→例題１２２(3)参照）

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

※Σの始点と終点の設定に注意
⑤$a_{n+1} = pa_n + qn$　型
今回の問題は$a_{n+1} = pa_n + qn$型で、これは$a_{n+1} = pa_n + r$　型と$a_{n+1} = a_n + f(n)$型を

合わせたものと考えることができます。【精講】にもあるように、この型の解き方は数パターンあります。どれか一つをマスターしておけばある程度は対応できますが、解くスピード、計算の楽さを考えると複数のやり方を問題によって使い分ける方がよいと思います。

⑤-1

まず一つ目の解き方は $b_n = a_n + \alpha n$ とおいて、b_nが③の$b_{n+1} = pb_n + r$型になるようにαを決める方法です。今回は（1）でαが与えられているのでこの方法が最適です。

※αが与えられていない場合の求め方は

$a_n = b_n - \alpha n$、 $a_{n+1} = b_{n+1} - \alpha(n+1)$より、$a_{n+1} = pa_n + qn$に代入して整理すると $b_{n+1} = pb_n + (q - p\alpha + \alpha)n + \alpha$となります。$b_{n+1} = pb_n + r$型にしたいので、右辺にｎがあっては困るため$q - p\alpha + \alpha = 0$である必要があります。これに元の$a_{n+1} = pa_n + r$ のｐ、ｑを代入してαについての方程式にしてαを求めます。

このようにαが決定し、$b_{n+1} = pb_n + r$型になったら、先述の③の方法でb_nを求めます。求まったb_n、αを$a_n = b_n - \alpha n$にそれぞれ代入して、やっとa_nが分かります。

⑤-2

$b_n = a_n + \alpha n + \beta$ とおいて、b_nが②の等比数列$b_{n+1} = pb_n$型になるようにα、βを決める方法です。

α、βの求め方は先ほどの⑤-1 と同様です。

$a_n = b_n - \alpha n - \beta$、 $a_{n+1} = b_{n+1} - \alpha(n+1) - \beta$を$a_{n+1} = pa_n + qn$に代入して出てくる$b_{n+1} = pb_n + (q - p\alpha + \alpha)n + \alpha - \beta + p\beta$について、これを等比型にするためには$q - p\alpha + \alpha$=0, $\alpha - \beta + p\beta$=0 である必要があります。これに元の$a_{n+1} = pa_n + r$ のｐ､ｑを代入してαとβについての連立方程式にしてα､βを求めます。

こうして$b_{n+1} = pb_n$型になったら、等比数列b_nを求めます。求まったb_n、α、βを$a_n =$ $b_n - \alpha n - \beta$にそれぞれ代入して、a_nが分かります。

⑤-3

$a_{n+1} = pa_n + qn$ についてｎを一つ大きくすると$a_{n+2} = pa_{n+1} + q(n+1)$ です。

この二つの式の差をとって、後は三項間漸化式の要領で解いていきます。

二式の差をとると

$a_{n+2} - a_{n+1} = p(a_{n+1} - a_n) + q$となり、$b_n = a_{n+1} - a_n$とするとこの$b_n$は③の$b_{n+1} = pb_n + r$型になるので、③の手順で$b_n$を求めます。求めた$b_n$を$b_n = a_{n+1} - a_n$に代入すると、今度は$a_n$が④の階差数列型になるので、こちらは④の手順で解いていきます。