

日医 2013 物理

略解

I

ア. $\sqrt{gR}$ イ. $\sqrt{2gR}$. ウ. 3 エ. $R \frac{\sqrt{sg}}{r}$ オ. $\frac{(3-\sqrt{2})R}{2} \sqrt{\frac{g}{r}}$

II

(1)ア. $\frac{4\pi kQ}{a^2}$ イ. 1 (2)ウ. $\frac{2p}{eB}$ (3)エ. $-\frac{B_0 a^2 \Delta t}{t_1}$ オ. $\frac{3B_0 a^2}{t_1}$

III

ア. $P_0 + \frac{kx}{S}$ イ. $P_0 SL + \frac{1}{2} kL^2$ ウ. $-\frac{P_0}{nC_V} \Delta V$ エ. $-\left(1 + \frac{R}{C_V}\right) \frac{P_0}{V_0} \Delta V$

オ. $2\pi \sqrt{\frac{mC_V V_0}{kC_V V_0 + P_0 S^2 (C_V + R)}}$

IV

ア. $\frac{1}{2}\lambda$ (または半波長) イ. $\left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{b\lambda}{d}$ ウ. $\frac{(n-1)ab}{d}$ エ. $\frac{mb\lambda}{nd_1}$ オ. 17

配点 各5点 (5×5×4)

I

原則 1. 力学的エネルギー保存の法則 → (イ)・(エ) に利用

質量 m の物体が速さ v で高さ h の所を運動しているとき、空気抵抗などの影響が無視できるなら、速さ v や高さ h が変化しても、運動エネルギー ($\frac{1}{2}mv^2$) と位置エネルギー (mgh) の和である力学的エネルギー ($\frac{1}{2}mv^2 + mgh$) は変化しない (ここで、 g は重力加速度 ($g = 9.8 [\text{m/s}^2]$) である)。これを力学的エネルギー保存の法則と言う。

例えば、鉛直方向に運動する質量 m の物体において、高さ h_1 のときの速さを v_1 、高さ h_2 のときの速さを v_2 とすると、次式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ただし、人工衛星のように地表から極めて高いところを運動する質量 m の物体の位置エネルギーは、 $-G\frac{Mm}{r}$ (G : 万有引力定数 ($G = 6.67 \times 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2]$)、 M : 地球の質量、 r : 地球の中心からの距離) と表す必要があり、式①の代わりに次式を用いる。

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{r_2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

原則 2. 万有引力と重力加速度 → (イ)・(エ) に利用

質量 $m [\text{kg}]$ と $M [\text{kg}]$ の 2 つの物体が距離 $r [\text{m}]$ 離れているとき、2 物体間に働く万有引力の大きさ $F [\text{N}]$ は、次式で表される。

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで、 G は万有引力定数 ($G = 6.67 \times 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2]$) である。

なお、地表での重力加速度を $g (= 9.8 [\text{m/s}^2])$ 、地球の半径を $r [\text{m}]$ 、地球の質量を $M [\text{kg}]$ とすると、質量 $m [\text{kg}]$ の物体に働く重力 $F = mg [\text{N}]$ と式①が等しくなり、次式を得る。

$$F = mg = G\frac{Mm}{r^2} \quad \rightarrow \quad g = \frac{GM}{r^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

原則 3. 運動の方程式と重力 → (ア)・(オ) に利用

一般に、質量 m の物体に力 F が加わるとき、次式のように、物体は加速度 a の等加速度運動をする。

$$ma = F$$

なお、質量 m の物体が速さ v (角振動数 ω)、半径 r の円運動をするとき、その運動方程式は次式で表される。

$$m\frac{v^2}{r} = F \quad (mr\omega^2 = F)$$

また、一般に質量 m の物体には鉛直下向きに大きさ mg (g は重力加速度) の重力がはたらく。よって、例えば、鉛直下向きに重力以外の力 F が加わっている物体の運動方程式は、次式のようになる。

$$ma = mg + F$$

原則 4. ケプラーの第 3 法則 → (ウ) に利用

太陽をまわる惑星 A と惑星 B が円運動をしているとき、それらの円運動の軌道半径と公転周期の間には、次式が成り立つ。ただし、 T_A は惑星 A の公転周期、 T_B は惑星 B の公転周期、 r_A は惑星 A の軌道半径、 r_B は惑星 B の軌道半径である。

$$\frac{T_A^2}{r_A^3} = \frac{T_B^2}{r_B^3}$$

原則 5. 運動量保存の法則 → (オ) に利用

質量と速さの積である運動量は保存される。例えば、質量 m_1 、速さ v_1 の物体 A と質量 m_2 、速さ v_2 の物体 B が衝突した後、物体 A の速さが v_1' 、物体 B の速さが v_2' となったとき、次式が成り立つ。

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

(ア) ～ (ウ)

【方針】

「無限の遠方まで行くために必要な最小の速さ」という文言と、無限遠方では地球の重力の影響が 0 になることから、この最小の速さは力学的エネルギー保存の法則を用いて求められることに気づく。また、「万有引力定数を解答に含めてはならない」という文言より、万有引力定数の代わりに重力加速度や地球の半径を用いなければならないと気づく。これらの点を踏まえて、「原則 1. 力学的エネルギー保存の法則」や「原則 2. 万有引力と重力加速度」、「原則 3. 運動の方程式と重力」、「原則 4. ケプラーの第 3 法則」の知識などを利用して順に解いてゆく。

【解答】

$$\text{ア} : \sqrt{gR} \quad \text{イ} : \sqrt{2gR} \quad \text{ウ} : 3$$

【解説】

(ア)

第 1 宇宙速度を v_1 [m/s]、人工衛星の質量を m_1 [kg] とおく。地表すれすれに円軌道を描く場合、向心力は重力 $m_1 g$ [N] となるので、運動方程式は、

$$m \frac{v_1^2}{R} = m_1 g$$

となる。よって、

$$v_1 = \sqrt{gR} \text{ [m/s]}$$

となる。

(イ)

まず、地表にある質量 m_2 [kg] の物体に働く重力は、 $m_2 g$ [N] である。一方、地球の中心から地表までの距離は R [m] であるから、この物体と地球の間に働く万有引力は、 $G \frac{Mm_2}{R^2}$ である（ただし、 M : 地球の質量、 G : 万有引力定数とする）。よって、次式が成り立つ。

$$m_2 g = G \frac{Mm_2}{R^2} \quad \therefore GM = gR^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで、質量 m_2 [kg] の人工衛星の地表での速さを V_1 [m/s] とする。また、人工衛星が無限遠方まで到達可能であると仮定し、その無限遠方における速さを V_∞ [m/s] とおくと、力学的エネルギー保存の法則により、

$$\frac{1}{2} m_2 V_1^2 - G \frac{Mm_2}{R} = \frac{1}{2} m_2 V_\infty^2 \geq 0$$

が成り立つから、

$$\frac{1}{2} m_2 V_1^2 \geq G \frac{Mm_2}{R} \quad \therefore V_1 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

となる。よって、第2宇宙速度を v_2 [m/s] とおくと、

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となるから、②式に①式を代入して GM を消去すると、

$$v_2 = \sqrt{2gR} \text{ [m/s]}$$

となる。

(ウ)

静止衛星の周期を T [h] とおくと、これは地球の自転周期と等しいので、 $T = 24$ [h] となる。ここで、半径 r_1 [m] の円軌道を描く人工衛星の周期を T_1 [h] とおくと、ケプラーの第3法則より、次式が成り立つ。

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{T_1^2}{r_1^3} \quad \therefore T_1 = \left(\frac{r_1}{r}\right)^{\frac{3}{2}} T \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

よって、③式に $r_1 = \frac{r}{4}$ を代入して、

$$T_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} T = \frac{1}{8} \times 24 = 3 \text{ [h]}$$

と求まる。

(エ)・(オ)

【方針】

「無限遠方に飛んでいってしまう最小の速さとなった」という文言より、設問(イ)と同様に、この最小の速さは力学的エネルギー保存の法則を用いて求められることに気づく。この点を1つの手掛かりとして、「原則1. 力学的エネルギー保存の法則」や「原則5. 運動量保存の法則」、「原則3. 運動の方程式と重力」の知識を利用して順に解いてゆく。

【解答】

$$\text{エ} : R\sqrt{\frac{2g}{r}} \quad \text{オ} : \frac{(3-\sqrt{2})R}{2}\sqrt{\frac{g}{r}}$$

【解説】

(エ)

質量 m [kg] の人工衛星の燃料噴射直後の速さを V_2 [m/s] とおくと、これが無限遠方まで飛行する条件は、(イ) の場合と同様に力学的エネルギー保存の法則を用いて、次式のようになる。

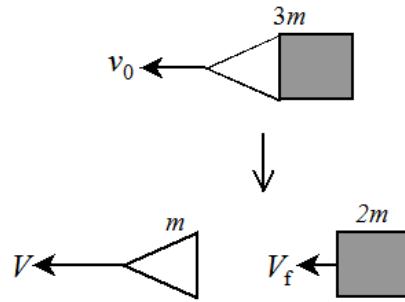
$$\frac{1}{2}mV_2^2 - G\frac{Mm}{r} \geq 0 \quad \therefore V_2 \geq \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

したがって、求める最小の速さ V [m/s] は、①式を使って、

$$V = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r}} = R\sqrt{\frac{2g}{r}} \text{ [m/s]} \quad \cdots\cdots\text{④}$$

となる。

(オ)



(図は WEB 上で見つからなかったため自作)

地球の中心から見た人工衛星の噴射前の速度、噴射直後の燃料部分の速度を、それぞれ v_0 [m/s]、 V_f [m/s] とおくと、噴射直後の人工衛星本体は、題意より速度 V [m/s] で運動するので、運動量保存の法則により、次式が成り立つ。

$$3mv_0 = mV + 2mV_f \quad \therefore V_f = \frac{3v_0 - V}{2} \quad \cdots\cdots\text{⑤}$$

また、噴射前の v_0 [m/s] で運動している人工衛星の運動方程式は、

$$3m \cdot \frac{v_0^2}{r} = G\frac{M \cdot 3m}{r^2}$$

であるから、この式と①式より、

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}} = R\sqrt{\frac{g}{r}}$$

となる。よって、この式と④式を⑤式に代入すると、

$$V_f = \frac{3v_0 - V}{2} = \frac{1}{2} \left(3R\sqrt{\frac{g}{r}} - R\sqrt{\frac{2g}{r}} \right) = \frac{(3-\sqrt{2})R}{2}\sqrt{\frac{g}{r}} \text{ [m/s]}$$

となる。

II

原則 6. クーロン力とローレンツ力 → (ア)・(ウ) に利用

距離 r [m] 離れた 2 つの点電荷の電荷が q [C] と Q [C] であるとき、点電荷の間には次式で表されるクーロン力 F [N] が働く。

$$F = k \frac{qQ}{r^2}$$

なお、上式中の k は比例定数で、真空中 (空気中) の値は $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9$ [N・m²/C²]

である。また、電荷 q [C] をもつ粒子が電場 E [N/C] の中にあるとき、この粒子が電場から受けるクーロン力 F [N] は、次式で表される。

$$F = qE$$

一方、電荷 q [C] をもつ粒子が速さ v [m/s] で磁場 B [T] の中で運動するとき、この粒子が磁場から受けるローレンツ力 F [N] は、次式で表される。

$$F = qvB \sin \theta$$

ここで、 θ は粒子速度の向きと磁場の向きがなす角度である。

原則 7. コンデンサーの電気容量 → (ア) に利用

コンデンサーの電気容量 C [F] は、次式により求められる。

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

なお、 ϵ_r は比誘電率、 ϵ_0 [F/m] は真空の誘電率 ($= 8.85 \times 10^{-12}$ [F/m])、 S [m²] は極板面積、 d [m] は極板間隔である。

原則 8. コンデンサーの電気量と静電エネルギー → (ア) に利用

電気容量 C [F] のコンデンサーにかかる電圧が V [V] であるとき、このコンデンサーには次の 2 式で表される電気量 Q [C] および静電エネルギー U [J] が蓄えられている。

$$Q = CV \dots\dots①$$

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \dots\dots②$$

式①より、式②は以下のようにも表せる。

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV = \frac{Q^2}{2C} \dots\dots③$$

原則 9. ファラデーの電磁誘導の法則 → (オ) に利用

1 回巻きのコイルに生じる誘導起電力 (電圧) は、次式のように、このコイルを貫く磁束 Φ の時間変化に相当する大きさを持ち、磁束の変化を妨げる向きに働く。

$$V = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

(1)

【方針】

「クーロンの法則における真空中での比例定数を k [$\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$] とし」と言う文言より、

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ となることに気づく。この点を 1 つの手掛かりとして、「原則 6. クーロン力とローレンツ力」や「原則 7. コンデンサーの電気容量」、「原則 8. コンデンサーの電気量と静電エネルギー」の知識を利用して順に解いてゆく。

【解答】

$$\text{ア} : \frac{4\pi k Q}{a^2} \quad \text{イ} : 1$$

【解説】

(ア)

コンデンサーの電気容量を C [F]、真空の誘電率を ϵ_0 [F/m] とおくと、正方形極板の面積が a^2 [m^2] であるから、

$$C = \frac{\epsilon_0 a^2}{d}$$

と表せる。したがって、極板間電圧を V [V] とおくと、 $Q = CV$ より、次式が得られる。

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Qd}{\epsilon_0 a^2} \dots\dots ①$$

一方、クーロンの法則での真空中の比例定数が k [$\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$] であるから、次式が成り立つ。

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \therefore \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \dots\dots ②$$

また、極板間の電場の強さを E [V/m] とおくと、単位面積あたりの電気力線は E 本になる。したがって、求める本数は、①式、②式と $V = Ed$ より、

$$E = \frac{V}{d} = \frac{Q}{\epsilon_0 a^2} = \frac{4\pi k Q}{a^2} \text{ 本} \dots\dots ③$$

となる。

(イ)

③式より、電場の強さ（＝単位面積あたりの電気力線本数） E は、 d とは関係なく、 Q だけで決まることがわかる。したがって、答えは 1 倍である。

(2)

【方針】

問題文の記述より、この電子はローレンツ力によって等速円運動をすることに気づく。こ

の点を踏まえて、「原則 6．クーロン力とローレンツ力」の知識を利用して解く。

【解答】

$$\text{ウ} : \frac{2p}{eB}$$

【解説】

電子の質量を m [kg]、図 1 の点 M での電子の速さを v [m/s] とおくと、 $p = mv$ となる。
電子は大きさが evB [N] のローレンツ力によって円運動をする。よって、その軌道半径を r [m] とおくと、運動方程式は

$$m \frac{v^2}{r} = evB$$

となり、この式より、

$$r = \frac{mv}{eB} = \frac{p}{eB}$$

となる。ゆえに、点 M と点 N の間の長さは、

$$2r = \frac{2p}{eB} \text{ [m]}$$

となる。

(3)

【方針】

図 2 より、磁束密度 B が時間 t の一次関数であることに気づく。この点を踏まえて、「原則 9．ファラデーの電磁誘導の法則」の知識などを利用して順に解いてゆく。

【解答】

$$\text{エ} : -\frac{B_0 a^2 \Delta t}{t_1} \quad \text{オ} : \frac{3B_0 a^2}{t_1}$$

【解説】

(エ)

図 2 のグラフより、磁束密度 B は、次式のように時間 t の関数として表される。

$$B = -\frac{B_0}{t_1}(t - t_1)$$

したがって、 t から $t + \Delta t$ までの時間変化において、磁束密度が B から $B + \Delta B$ へ変化したとするなら、 B の時間変化率は、

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{B_0}{t_1} \text{ (= 図 1 の直線の傾き)} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

となる。

コイルを貫く磁束を Φ [Wb] とおくと、コイルの面積は $S = a^2$ [m²] で、磁束密度はコイルの面に対して常に垂直であるから、

$$\Phi = BS = Ba^2$$

となる。したがって、 Δt [s] の時間経過に対する磁束の変化量を $\Delta\Phi$ [Wb] とおくと、次式が成り立つ。

$$\Delta\Phi = a^2\Delta B \quad \cdots\cdots\textcircled{5}$$

よって、④式より $\Delta B = -\frac{B_0}{t_1}\Delta t$ であるから、これを⑤式に代入すると、

$$\Delta\Phi = -\frac{B_0a^2\Delta t}{t_1} \text{ [Wb]} \quad \cdots\cdots\textcircled{6}$$

となる。

(オ)

コイルの巻き数は $N = 3$ である。よって、ファラデーの電磁誘導の法則と⑥式を用いると、誘導起電力の大きさ V [V] は、次式のようにになる。

$$V = N \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = \frac{3B_0a^2}{t_1} \text{ [V]}$$

III

原則 10. 熱力学第 1 法則とモル比熱 → (イ) ~ (エ) に利用

気体に与えた熱量 Q は、気体の内部エネルギーの増加量 ΔU と、気体が外部にした仕事 W の和に等しい。すなわち、次式が成り立つ。

$$Q = \Delta U + W \cdots \cdots \textcircled{1}$$

なお、単原子分子気体の内部エネルギー U は次式で表される。ここで、 n は物質量、 R は気体定数、 T は温度である。

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

また、気体が外部にした仕事 W は次式で表される。ここで、 p は圧力、 ΔV は体積の増加量である。

$$W = p\Delta V$$

ところで、単原子分子気体の定圧変化では、 $W = nR\Delta T$ となるので、式①は次式のように変形できる。なお、 $C_p = \frac{5}{2}R$ を定圧モル比熱と言う。

$$Q = \Delta U + nR\Delta T = \frac{3}{2}nR\Delta T + nR\Delta T = \frac{5}{2}nR\Delta T = nC_p\Delta T$$

また、単原子分子気体の定積変化では、 $W = 0$ となるので、式①は次式のように変形できる。なお、 $C_v = \frac{3}{2}R$ を定積モル比熱と言う。

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T = nC_v\Delta T$$

原則 11. 単振動の運動方程式と周期など → (オ) に利用

物体の質量を m 、変位を x 、加速度を a とおいたとき、運動方程式が

$$ma = -kx \quad (k \text{ は正の定数})$$

で表されるなら、この物体は単振動をする。なお、単振動の周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

となる。また、振幅を A とおくと、変位 x は次式で表される。

$$x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \quad (\varphi \text{ は初期位相})$$

となる。

(ア)・(イ)

【方針】

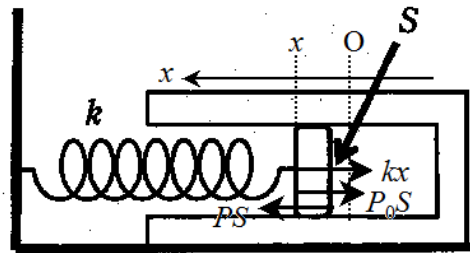
図より、シリンダー内部の気体が膨張すると、ばねの弾性力が右向きに働くことに気づく。この点を最初の手掛かりとして、「原則 10. 熱力学第 1 法則とモル比熱」の知識などを利用して順に解いてゆく。

【解答】

$$\text{ア} : P_0 + \frac{kx}{S} \quad \text{イ} : P_0 SL + \frac{1}{2} kL^2$$

【解説】

(ア)



(図は問題に掲載されている図に加筆して作成)

上図のように、ばねが縮む向き（図の左向き）を x 軸の正の向きにとると、ピストンの位置 x は、気体が膨張したときに $x > 0$ 、気体が収縮したときに $x < 0$ となる。

まず、気体が加熱されて膨張し、ばねが x だけ縮んだとき、ばねの弾性力は、原点 O からの変位 x とは逆の向きに働くから、 $-kx$ となる。よって、求める圧力を P とおくと、ピストンに働く力のつり合いより、

$$PS - P_0 S - kx = 0$$

が成り立ち、この式より、

$$P = P_0 + \frac{kx}{S}$$

となる。

(イ)

$x = L$ になるまでに、 $\Delta V = SL$ だけ気体の体積は増加している。この期間に気体は、ピストンに働いている大気圧 P_0 に逆らいながら $P_0 \Delta V$ の仕事をするとともに、弾性力に逆らいながら $\frac{1}{2} kL^2$ の仕事をしているので、これらの仕事の和が求める仕事の大きさ W になる。よって、 W は、

$$W = P_0 SL + \frac{1}{2} kL^2$$

となる。

(ウ) ～ (オ)

【方針】

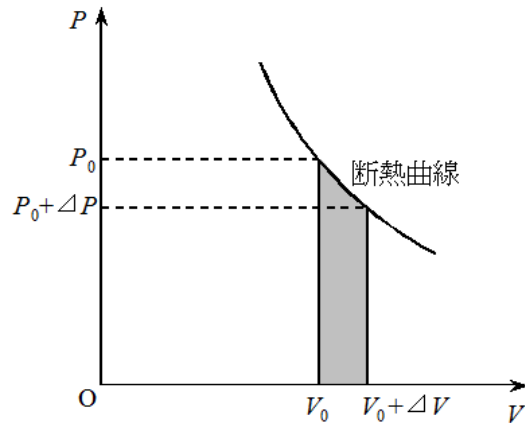
断熱変化であるから、熱力学第 1 法則における式 $Q = \Delta U + W$ の左辺が 0 となることに気づく。この点を踏まえて、「原則 1 0．熱力学第 1 法則とモル比熱」や「原則 1 1．単振動の運動方程式と周期など」の知識などを利用して順に解いてゆく。

【解答】

$$\text{ウ} : -\frac{P_0}{nC_V} \Delta V \quad \text{エ} : -\left(1 + \frac{R}{C_V}\right) \frac{P_0}{V_0} \Delta V \quad \text{オ} : 2\pi \sqrt{\frac{mC_V V_0}{kC_V V_0 + P_0 S^2 (C_V + R)}}$$

【解説】

(ウ)



(図は WEB 上で見つからなかったため自作)

この断熱変化において気体がした仕事を W とおくと、 W は上のグラフの灰色部分の面積に等しくなる。ここで、 ΔV 、 ΔP は微小であるから、この部分の曲線を直線で近似すると、仕事 W は台形の面積で表されるので、次式が成り立つ。

$$W \cong \frac{1}{2}(P_0 + P_0 + \Delta P)\Delta V \cong P_0 \Delta V \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(注：2 次の微小量である $\Delta P \Delta V$ を無視した)

また、気体の内部エネルギーの増加量を ΔU とおくと、

$$\Delta U = nC_V(T_0 + \Delta T) - nC_V T_0 = nC_V \Delta T \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。なお、断熱変化であるから、気体がこの間に吸収した熱量 Q は 0 である。したがって、熱力学第 1 法則における式 $Q = \Delta U + W$ に、 $Q = 0$ と①式、②式を代入すると、

$$0 = nC_V \Delta T + P_0 \Delta V$$

が成り立ち、 ΔT は

$$\Delta T \cong -\frac{P_0}{nC_V} \Delta V \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。

(エ)

問題文中の関係式：

$$P_0 \Delta V + V_0 \Delta P = nR \Delta T \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

の右辺に、③式を代入すると、

$$P_0 \Delta V + V_0 \Delta P = -nR \frac{P_0}{nC_V} \Delta V = -\frac{R}{C_V} P_0 \Delta V$$

となる。よって、

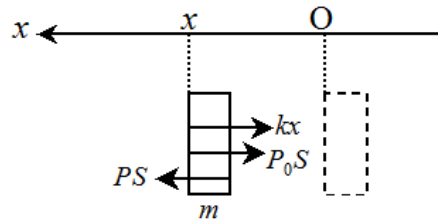
$$V_0 \Delta P = - \left(1 + \frac{R}{c_v} \right) P_0 \Delta V$$

となり、 ΔP は

$$\Delta P = - \left(1 + \frac{R}{c_v} \right) \frac{P_0}{V_0} \Delta V \dots\dots\dots ⑤$$

となる。

(オ)



(図は WEB 上で見つからなかったため自作)

設問 (ア) と同様に x 軸をとると、ピストンには、上図のように、 x 軸の正の向きに気体の圧力による力 PS が、 x 軸の負の向きに大気圧による力 P_0S と弾性力 kx がそれぞれ加わる。よって、 x 軸方向の合力 F は、 $P - P_0 = \Delta P$ も用いると、

$$F = (P_0 + \Delta P)S - P_0S - kx = -kx + S\Delta P \dots\dots\dots ⑥$$

となる。⑥式の ΔP に⑤式を代入して、 $\Delta V = Sx$ を用いると、次式のようになる。

$$F = -kx - S \left(1 + \frac{R}{c_v} \right) \frac{P_0}{V_0} \cdot Sx = - \left\{ k + \frac{P_0 S^2 (c_v + R)}{c_v V_0} \right\} x = -k'x \dots\dots\dots ⑦$$

ただし、「みかけのばね定数」 k' を

$$k' = k + \frac{P_0 S^2 (c_v + R)}{c_v V_0} \dots\dots\dots ⑧$$

とした。⑦式の形と $k' > 0$ より、ピストンに加わる力 F は変位 x に比例する復元力となることがわかる。よって、ピストンの運動方程式は、加速度を a とすると、質量が m であるから、

$$ma = -k'x$$

となって、ピストンは単振動をすることがわかる。したがって、単振動の周期 T は、

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k'}}$$

となり、この式の k' に⑧式を代入して、

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k + \frac{P_0 S^2 (c_v + R)}{c_v V_0}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m c_v V_0}{k c_v V_0 + P_0 S^2 (c_v + R)}}$$

となる。

IV

原則 1 2. 干渉の条件式 → (ア) ~ (オ) に利用

同じ光源から出た波長 λ [m] の光が分かれて、光路差 d [m] の 2 つの経路を進んだ後、同じ経路に合流したとき、この 2 つの光は干渉して以下のようなになる。

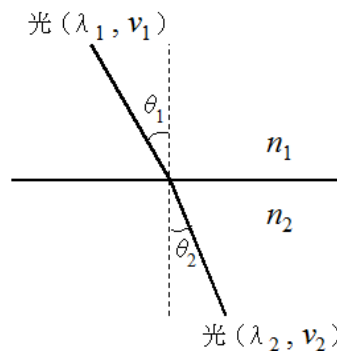
$d = m\lambda$ ($m = 1, 2, \dots$) の場合、2 つの光は強め合う (明るくなる)。

$d = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda$ ($m = 1, 2, \dots$) の場合、2 つの光は弱め合う (暗くなる)。

原則 1 3. 屈折の法則 → (ウ) ~ (オ) に利用

空气中 (屈折率: n_1) および屈折率 n_2 の媒体中を光が進行する場合、その境界面で光は屈折する。このとき、境界面と垂直な面と空气中 (媒体中) の光の進行経路がなす角を θ_1 (θ_2)、空气中 (媒体中) の光の速度を v_1 (v_2)、空气中 (媒体中) の光の波長を λ_1 (λ_2) とすると、次式で表される屈折の法則が成り立つ。なお、空气中の屈折率は $n_1 = 1.0003$ であるため、 $n_1 = 1$ として計算することが多い。

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



(図は WEB 上で見つからなかったため自作)

(ア) ~ (ウ)

【方針】

2 つの回折光の光路差が $\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda$ ($m = 1, 2, \dots$) のときに暗点が生じることに気づく。

この点を踏まえて、「原則 1 2. 干渉の条件式」や「原則 1 3. 屈折の法則」の知識などを利用して順に解いてゆく。

【解答】

ア: $\frac{1}{2}\lambda$ (または、半波長) イ: $\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{b\lambda}{d}$ ウ: $\frac{(n-1)ab}{d}$

【解説】

(ア)

中心 C に最も近い暗点が P であり、2 つの回折光の経路差は $\frac{1}{2}\lambda$ (半波長) である。このとき、2 つの回折光は互いに逆位相となり弱め合う。

(イ)

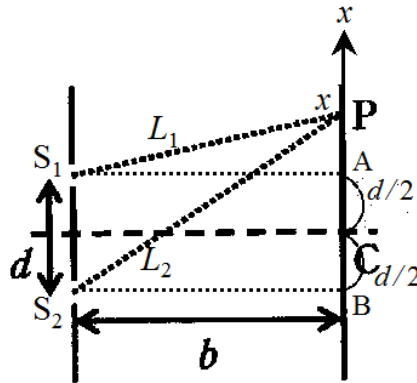


図 A

(図は問題に掲載されている図 1 に加筆して作成)

上図 (図 A) のように、2 個のスリットを S_1 、 S_2 、中心 C を原点とし、中心 C から m 番目の暗点 P の x 座標を x とする。また、 S_1 から P までの距離、 S_2 から P までの距離を、それぞれ L_1 、 L_2 とおく。すると、P が m 番目の暗点であることから、 $L_2 - L_1$ (2 つの回折光の経路差) は、次式を満たすことがわかる。

$$L_2 - L_1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (\text{ただし、} m = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{……①}$$

また、 S_1 、 S_2 からスクリーンに下した垂線の足を、それぞれ A、B とすると、直角三角形 S_1PA の斜辺が L_1 、直角三角形 S_2PB の斜辺が L_2 となるから、三平方の定理より、

$$L_1 = \sqrt{b^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}, \quad L_2 = \sqrt{b^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2}$$

となる。さらに、題意より、 b に比べて x や d は十分小さいから、 $\frac{x-d}{b}$ や $\frac{x+d}{b}$ は 1 に比べて十分小さくなり、「 $1 \gg a$ のとき、 $(1+a)^n \approx 1+na$ 」という近似計算の公式を使うことができる。これらの点を踏まえて、 L_1 、 L_2 を計算すると、以下ようになる。

$$L_1 = \sqrt{b^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2} = b \left\{ 1 + \left(\frac{x-d}{b}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \approx b \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x-d}{b}\right)^2 \right\} \quad \text{……②}$$

$$L_2 = \sqrt{b^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2} = b \left\{ 1 + \left(\frac{x+d}{b}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \approx b \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x+d}{b}\right)^2 \right\} \quad \text{……③}$$

よって、③式－②式より、

$$L_2 - L_1 \doteq \frac{xd}{b} \quad \cdots\cdots ④$$

となる。したがって、①式と④式の右辺どうしが等しくなるから、次式が得られる。

$$\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda = \frac{xd}{b} \quad \therefore x = \left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{b\lambda}{d} \quad \cdots\cdots ⑤$$

(ウ)

図 A の経路 L_1 の途中に、長さ a 、屈折率 n の媒質を置いたとき、この媒質中を進む光の光路長は na となる。よって、媒質を置いた場合、媒質がない場合に比べて、 L_1 の光路長は、 $na - a = (n - 1)a$ だけ長くなって、 $L_1 + (n - 1)a$ となる。ゆえに、 S_1 、 S_2 からの 2 つの回折光の光路差は、④式を用いて、次式のようになる。

$$L_2 - \{L_1 + (n - 1)a\} \doteq \frac{xd}{b} - (n - 1)a$$

したがって、 $m = 1, 2, 3, \dots$ としたとき、弱め合う条件は、次式で表される。

$$\frac{xd}{b} - (n - 1)a = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \therefore x = \left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{b\lambda}{d} + \frac{(n - 1)ab}{d} \quad \cdots\cdots ⑥$$

よって、この⑥式と前問の⑤式を見比べると、媒質を置いた図 2 では、図 1 におけるすべての暗点が、 $\frac{(n - 1)ab}{d}$ だけ上方向へずれることがわかる。

(エ)・(オ)

【方針】

2 つの回折光の光路差が $m\lambda$ ($m = 1, 2, \dots$) のときに明点が生じることに気づく。この点を踏まえて、「原則 1 2. 干渉の条件式」や「原則 1 3. 屈折の法則」の知識を利用して順に解いてゆく。

【解答】

$$\text{エ} : \frac{mb\lambda}{nd_1} \quad \text{オ} : 17$$

【解説】

(エ)

図 3 の場合、屈折率 n の媒質で満たされているから、中心 C から点 P までの距離を x とすると、格子定数 d_1 の回折格子 D から点 P までの回折光における④式に相当する光路差は、 $n \times \frac{xd_1}{b} = \frac{nx d_1}{b}$ となる。よって、P が暗点となるとき、⑤式に相当する次式が成り立つ。

$$x = \left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{b\lambda}{nd_1} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

また、P が明点となるときは、同様にして次式が成り立つ。

$$x = \frac{mb\lambda}{nd_1} \quad (m = 1, 2, \dots) \dots\dots ⑦$$

(オ)

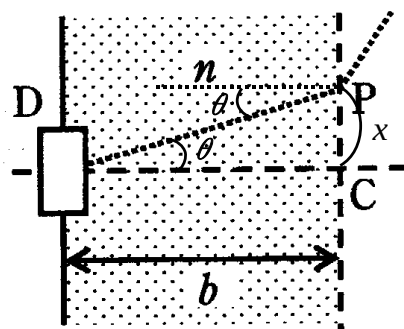


図 B

(図は問題に掲載されている図 3 に加筆して作成)

真空に対する屈折率 n の媒質の臨界角を θ_c とおくと、光の屈折の法則より、次式が成り立つ。

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin \theta_c} = n \quad \therefore \sin \theta_c = \frac{1}{n} \dots\dots ⑧$$

また、上図(図 B)のように、中心 C から点 P までの距離を x とし、回折光の入射角を θ とおくと、題意より $\theta \ll 1$ であるから、⑦式より、点 P に明点ができる条件は、次式のようになる。

$$\sin \theta \cong \tan \theta = \frac{x}{b} = \frac{m\lambda}{nd_1} \quad (m = 1, 2, \dots) \dots\dots ⑨$$

ここで、全反射が起きる条件は、 $\theta > \theta_c$ すなわち $\sin \theta > \sin \theta_c$ であるから、⑧式と⑨式より、次式を満足すればよい。

$$\frac{m\lambda}{nd_1} > \frac{1}{n} \quad \therefore m > \frac{d_1}{\lambda}$$

よって、与えられた数値を右辺に代入すると、 $m > 16.3 \dots$ となるから、 $m \geq 17$ の光、すなわち 17 番目以降の光が全反射する。