Q.(基礎問題精講 2B P124 例題 75)
解説の補助をお願いします。

A.　2^{10}という整数を例に、整数の桁数の求め方を考えます。2^{10}くらいであれば手計算で 1024 と求められるので 4 桁とすぐに分かると思います。しかしもっと大きな整数のときでも対応できるよう、手計算ではなく対数を使った桁数の求め方を考えてみましょう。

2^{10}(=1024)の桁数は 4 桁です。2^{10}が 4 桁であるということを式で示すには、**2^{10}が 4 桁の数の最小値(1000)と最大値(9999)の間にあるということを示せば十分です。**これを不等式で表すと

$$1000 \leqq 2^{10} \leqq 9999$$

ここから常用対数($\log_{10}$)を使いやすくするために少し工夫します。
整数の範囲で、9999 以下は 10000 未満としても同じなので

$$1000 \leqq 2^{10} < 10000$$

また 1000=10^3、10000=10^4と表します。

$$10^3 \leqq 2^{10} < 10^4$$

各辺の常用対数をとって

$$\log_{10} 10^3 \leqq \log_{10} 2^{10} < \log_{10} 10^4$$
$$\Leftrightarrow 3 \leqq 10 \log_{10} 2 < 4$$

$\log_{10} 2$や$\log_{10} 3$は問題に値が与えられますので、$10 \log_{10} 2$を計算し、3 以上 4 未満であることを示せば、2^{10}が 4 桁であることを示せることになります。

この例をもとに一般化すると、n 桁の整数 K は

$$10^{n-1} \leqq K < 10^n$$

を満たすことになります。これの常用対数をとると

$$n - 1 \leqq \log_{10} K < n$$

となります。
逆に **K がこの不等式を満たすとき、K は n 桁ということです。**

また同様の考え方で、小数で初めて 0 以外が現れる位も求められます。
例として 0.0002 という小数を考えます。この小数は小数第 4 位で初めて 0 以外の数が現れます。

0.0002 が小数第 4 位で初めて 0 以外の数が現れる数ということを式で表すには **0.0001 以上で 0.001 より小さいことを示せば十分なので、**

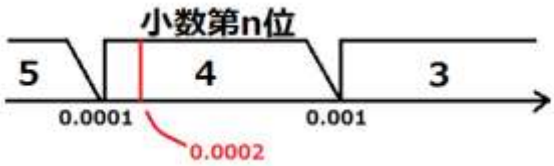
$$0.0001 \leqq 0.0002 < 0.001$$

整数のとき同様に$0.0001 = 10^{-4}$,$0.0002 = 2 \times 10^{-4}$,$0.001 = 10^{-3}$と表すと

$$10^{-4} \leqq 2 \times 10^{-4} < 10^{-3}$$

常用対数をとって

$$-4 \leqq -4\log_{10}2 < -3$$



整数のときと同じように$-4\log_{10}2$の値を求め、それが-4 から-3 の間にあれば、0.0002 は小数第 4 位で初めて 0 以外の数が現れるということを示せたことになります。

このことを一般化すると、ある 1 より小さい小数 k が小数第 n 位で初めて 0 以外の数が現れるとき

$$10^{-n} \leqq k < 10^{-(n-1)}$$

を満たします。これの常用対数をとると

$$-n \leqq \log_{10} k < -(n-1)$$

となります。
逆に **k がこの不等式をみたすとき、k は小数第 n 位で初めて 0 以外の数が現れます。**

以上をまとめると、公式Ⅰ、Ⅱは**同じ桁数のうち最小値と最大値の間にあるということを示す**ことで、桁数を求めにかかるという方針から導き出された公式になります。公式は当然覚えている必要がありますが、**もし忘れてしまっても自力で導き出せるように公式がどのようにして生まれたのかを理解しておく**ことも、覚えることと同じくらい重要です。