聖マリアンナ医科大 2013　数学

配点

１　①６点　②③各８点（６＋８×２）

２［１］各５点　［２］［３］各８点（５×３＋８×２）

３　①～⑥各５点　ア、ウ：各２点　イ：４点（５×６＋２×２＋４）

４［１］９点

※大問４［２］の行列は除く。

聖マリアンナ医科大学入試問題

2013 年数学

解答・解説編

①数列

○原則

1．　◆$a_{n+1}=pa_n+q$型漸化式の一般項

p,qを実数とします。

漸化式　$a_{n+1}=pa_n+q$　の一般項を求めます。

a_{n+1},a_nをいずれもkと置き換えると、kの特性方程式が得られます。

$k=pk+q$

これをkについて解きます。

$(1-p)k=q$

$$\Leftrightarrow k=\frac{q}{1-p}$$

漸化式の両辺からkを引きます。

$a_{n+1}-k=pa_n+q-k$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}-\frac{q}{1-p}=pa_n+q-\frac{q}{1-p}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}-\frac{q}{1-p}=pa_n-\frac{pq}{1-p}$$

右辺をpでまとめます。

$$\Leftrightarrow a_{n+1}-\frac{q}{1-p}=p\left(a_n-\frac{q}{1-p}\right)$$

ここで$b_n=a_n-\dfrac{q}{1-p}$　　—(※)

とおくと、

$b_{n+1}=pb_n$

数列$\{b_n\}$は、初項$b_1\left(=a_1-\dfrac{q}{1-p}\right)$、公比$p$の等比数列です。

従って、$b_n=p^{n-1}\left(a_1-\dfrac{q}{1-p}\right)$

(※)により$\{a_n\}$の一般項が求められます。

$$\therefore a_n=p^{n-1}\left(a_1-\frac{q}{1-p}\right)+\frac{q}{1-p}$$

このように、この型の漸化式は特性方程式の解kを両辺から引くことで等比数列を作り、一般項を求めることが出来ます。

２．　◆Σの計算

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

○解答・解説

【方針】

〔1〕①与えられた漸化式の形が**原則 1** の型になっているので、**原則 1** の方法に基づいてa_nの一般項を求めます。

②Σ内を計算するとnとなるので、**原則 2** に基づいてΣの値を求めます。

〔2〕〔1〕と同様に一般項を求めます。総和の最小値をとるnを求めるために、増減を調べます。

【解説】

〔1〕　〔2〕の一般項を求めることも考えて、ここではbを代入する前に$\{a_n\}$の一般項を求めます。

$a_{n+1} = ea_n + b$

ここで、a_{n+1}とa_nをk(k:実数)とすると、特性方程式は

$k = ek + b$

$\Leftrightarrow (1-e)k = b$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{b}{1-e}$

よって、(2)式の両辺から$\dfrac{b}{1-e}$引きます。

$a_{n+1} - \dfrac{b}{1-e} = ea_n + b - \dfrac{b}{1-e}$

$\Leftrightarrow a_{n+1} - \dfrac{b}{1-e} = ea_n - \dfrac{eb}{1-e}$

$\Leftrightarrow a_{n+1} - \dfrac{b}{1-e} = e\left(a_n - \dfrac{b}{1-e}\right)$

$\qquad = e^2\left(a_{n-1} - \dfrac{b}{1-e}\right)$

$$= \cdots$$

$$= e^n\left(a_1 - \frac{b}{1-e}\right)$$

$$= e^n\left(\frac{e-e^2+b}{1-e} - \frac{b}{1-e}\right) \qquad \left(\because a_1 = \frac{e-e^2+b}{1-e}\right)$$

$$= e^n \times \frac{e(1-e)}{1-e}$$

$$= e^{n+1}$$

従って、

$$a_{n+1} = e^{n+1} + \frac{b}{1-e}$$

$n+1 \to n$に置き換えます。

$$a_n = e^n + \frac{b}{1-e} \qquad -(*)$$

$\therefore b = 11$を代入して、

$$a_n = e^n + \frac{11}{1-e} \qquad (\to ①)$$

次に、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log_e\left(a_k + \frac{11}{e-1}\right)$を求めます。$a_k = e^k + \dfrac{11}{1-e}$を代入して、

$$\sum_{k=1}^{n} \log_e\left(e^k + \frac{11}{1-e} + \frac{11}{e-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \log_e\left(e^k + \frac{11}{1-e} - \frac{11}{1-e}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \log_e e^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1) \qquad (\to ②)$$

〔2〕　〔1〕の$(*)$に$b = e^{11}$を代入します。

$$a_n = e^n + \frac{e^{11}}{1-e}$$

従って、

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(e^n + \frac{e^{11}}{1-e}\right) = \sum_{k=1}^{n} e^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{11}}{1-e}$$

$$= \frac{e(1-e^n)}{1-e} + n\frac{e^{11}}{1-e}$$

$$= \frac{e(1-e^n)+ne^{11}}{1-e}$$

$$= \frac{e-e^{n+1}+ne^{11}}{1-e}$$

$$= \frac{e(1-e^n+ne^{10})}{1-e}$$

この値が最小となるnを求めるので、nについての増減を調べます。

$f(x) = \dfrac{e(1-e^x+xe^{10})}{1-e}$とすると、

$$f'(x) = \frac{e(-e^x+e^{10})}{1-e}$$

$f'(x)=0$とすると、$x=10$

$1-e<0$であることに注意して、$f(x)$の増減は以下の表のようになります。

x	…	10	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\dfrac{e(1-9e^{10})}{1-e}$	↗

これより、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$が最小値をとるときの$n=10$ $\quad(\rightarrow ③)$

②2 次方程式、対称式

○原則

1．　◆解と係数の関係

xについての 2 次方程式を$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$とします。

この 2 次方程式の 2 つの(複素数も含む)解をα,βとすると、

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

2．　◆対称式

対称式とは、文字を入れ替えても元と同じになる式のことです。文字が 2 つの場合、

$f(x,y)=f(y,x)$

となる$f(x,y)$のことを言います。

例）　$f(x,y)=x+y$のとき、$f(y,x)=y+x=f(x,y)$

文字が 2 つの交代式は必ず基本対称式($x+y$とxy)で表すことが出来ます。

3．　◆2 次方程式の判別式

2 次方程式$ax^2+bx+c=0$が持つ実数解の個数を判別するための式を、2 次方程式の判別式といいます。

上の 2 次方程式の判別式をDとすると、

$D=b^2-4ac$

Dの値によって次のように 2 次方程式の実数解の個数を判別することが出来ます。

$$\begin{cases} D>0 & \Leftrightarrow \text{　2 つの異なる実数解を持つ} \\ D=0 & \Leftrightarrow \text{　1 つの実数解（重解）を持つ} \\ D<0 & \Leftrightarrow \text{　実数解を持たない（複素数解を持つ）} \end{cases}$$

4．　◆因数定理

整式$P(x)$を$x-a$で割ったときの商を$Q(x)$、余りをRとすると

$P(x)=Q(x)(x-a)+R$

$P(a)=\ R$

これを剰余の定理といいます。

余りが0のとき、

$P(x)=Q(x)(x-a)$

$P(a)=\ 0$

となって、

$P(a)=0 \Leftrightarrow P(x)$が$x-a$を因数に持つ

という関係が成り立ちます。これを因数定理といいます。

因数定理は 3 次以上の整式の因数分解によく用いられます。

○解答・解説

【方針】

〔1〕二次方程式の解をa,bとして、まず$a+b$とabの値を求めるので、解と係数の関係(**原則 1**)を用います。a^2+b^2-2abは対称式(**原則 2**)になっているので基本対称式で表し、先に求めた$a+b$とabの値を代入します。

〔2〕〔1〕の結果を用いて、s,t,s^2-4tの正負を調べます。s,tについてはa,bがともに負であることを、s^2-4tについては 2 次方程式の判別式(**原則 3**)を利用します。

〔3〕〔1〕より$a+b=s$なので、sのとりうる範囲を求めます。〔1〕と〔2〕でs,tの条件式を求めているので、これらからtを消去し、sのみの条件式に書き換えます。

【解説】

〔1〕a,bはいずれもuについての 2 次方程式$u^2-su+t=0$の解なので、解と係数の関係(**原則 1**)より

$$a+b=s \qquad (\rightarrow ①)$$

$$ab=t \qquad (\rightarrow ②)$$

a^3+b^3-2abを基本対称式(**原則 2**)で表します。

$$\begin{aligned} a^3+b^3-2ab &= a^3+b^3+3a^2b+3ab^2-3a^2b-3ab^2-2ab \\ &= (a+b)^3-3a^2b-3ab^2-2ab \\ &= (a+b)^3-ab\{3(a+b)+2\} \end{aligned}$$

ここに$a+b=s, ab=t$を代入します。

$$a^3+b^3-2ab=s^3-(3s+2)t=s^3-3st-2t \qquad (\rightarrow ③)$$

〔2〕

$s=a+b<0\ (\because a<0,b<0)$

$t=ab>0\ (\because a<0,b<0)$

また、2 次方程式$u^2-su+t=0$は負の実数解a,bを持ちます。この 2 次方程式の判別式をDとすると、実数解の個数は 1 個($a=b$のとき)または 2 個($a\neq b$のとき)になるので、

$$D=s^2-4t \geqq 0 \qquad (\leftarrow \textbf{原則 3})$$

$\Leftrightarrow s^2 \geqq 4t$

$\therefore$ (ロ)

〔3〕　〔2〕より$s = a + b$なので、sのとりうる範囲を考えます。
sとtには関係があるので、これまでのs, tについての条件をまとめます。
〔1〕より、
$a^3 + b^3 - 2ab = -4$
$\Leftrightarrow s^3 - 3st - 2t = -4 \quad —(\mathbf{1})$
また〔2〕より、

$$\begin{cases} s < 0 \quad —(\mathbf{2}) \\ t > 0 \quad —(\mathbf{3}) \\ s^2 \geqq 4t \quad —(\mathbf{4}) \end{cases}$$

まず条件式からtを消去して全てsで書き換えるために、tをsで表します。
$(\mathbf{1})$より、
$s^3 - 3st - 2t = -4 \quad \Leftrightarrow \quad -(3s + 2)t = -s^3 - 4$
$\Leftrightarrow \ (3s + 2)t = s^3 + 4$

$\mathrm{s} = -\dfrac{2}{3}$のとき、$\left(\text{左辺}\right) = 0$ですが、$\left(\text{右辺}\right) = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^3 + 4 = \dfrac{100}{27}$となって

左辺と右辺が等しくないので、$s \neq -\dfrac{2}{3}$です。

したがって両辺を$3s + 2$で割ると

$$t = \frac{s^3 + 4}{3s + 2}$$

これを$(\mathbf{3}), (\mathbf{4})$に代入します。

$(\mathbf{3}) \Leftrightarrow \dfrac{s^3 + 4}{3s + 2} > 0$

両辺に$(3s + 2)^2$をかけます。$(3s + 2)^2 > 0$であることに注意して、
$(s^3 + 4)(3s + 2) > 0$

$\Leftrightarrow \left(s + \sqrt[3]{4}\right)\left\{s^2 - \sqrt[3]{4}s + \left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right\}(3s + 2) > 0$

$\Leftrightarrow \left(s + \sqrt[3]{4}\right)(3s + 2)\left(s^2 - \sqrt[3]{4}s + \sqrt[3]{16}\right) > 0$

ここで$s^2-\sqrt[3]{4}s+\sqrt[3]{16}$の正負について考えます。

$$s^2-\sqrt[3]{4}s+\sqrt[3]{16}=\left(s-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2-\frac{\sqrt[3]{16}}{4}+\sqrt[3]{16}=\left(s-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2+\frac{3\sqrt[3]{16}}{4}$$

これより$s^2-\sqrt[3]{4}s+\sqrt[3]{16}>0$

よって両辺を$s^2-\sqrt[3]{4}s+\sqrt[3]{16}$で割ると

$(s+\sqrt[3]{4})(3s+2)>0$

$-\sqrt[3]{4}$と$-\dfrac{2}{3}$の大小関係について考えます。

$$\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}>1^{\frac{2}{3}}=1>\frac{2}{3}$$

よって$\sqrt[3]{4}>\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\ -\sqrt[3]{4}<-\dfrac{2}{3}$

したがって

$$(s+\sqrt[3]{4})(3s+2)>0\Leftrightarrow s<-\sqrt[3]{4}\,,s>-\frac{2}{3}\quad -(\mathbf{3})'$$

次に$(\mathbf{4})$に$t=\dfrac{s^3+4}{3s+2}$を代入します。

$(\mathbf{4})\ \Leftrightarrow\ s^2\geqq 4\times\dfrac{s^3+4}{3s+2}$

両辺に$(3s+2)^2$をかけます。

$s^2(3s+2)^2\geqq 4(s^3+4)(3s+2)$

$\Leftrightarrow\{s^2(3s+2)-4(s^3+4)\}(3s+2)\geqq 0$

$\Leftrightarrow(3s^3+2s^2-4s^3-16)(3s+2)\geqq 0$

$\Leftrightarrow(-s^3+2s^2-16)(3s+2)\geqq 0$

$\Leftrightarrow(s^3-2s^2+16)(3s+2)\leqq 0$

ここで、s^3-2s^2+16は$s=-2$を代入すると0になるので、因数定理(**原則４**)により$s+2$を因数に持ちます。したがって、

$(s+2)(s^2-4s+8)(3s+2)\leqq 0$

s^2-4s+8の正負について考えます。

$s^2-4s+8=(s-2)^2-4+8=(s-2)^2+4>0$

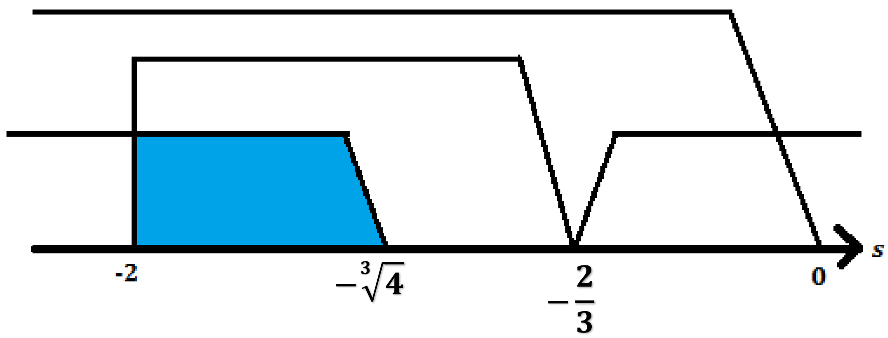
よって両辺をs^2-4s+8で割ると

$(s+2)(3s+2) \leqq 0$

$s \neq -\frac{2}{3}$を考慮して

$-2 \leqq s < -\frac{2}{3} \quad —(\mathbf{4})'$

以上より、$(\mathbf{2}), (\mathbf{3})', (\mathbf{4})'$の共通範囲を数直線で表すと以下の通りとなります。



数直線より、sのとりうる範囲は

$-2 \leqq s < -\sqrt[3]{4}$

$\therefore -2 \leqq a+b < -\sqrt[3]{4}$

③ベクトル

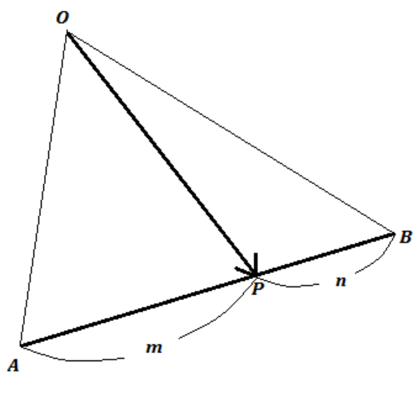
○原則

1．　◆内分点の位置ベクトル

点A, Bの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{a}, \vec{b}$とします。

線分ABを$m:n$に内分する点をPとすると、点Pの位置ベクトル$\vec{p}$は

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$



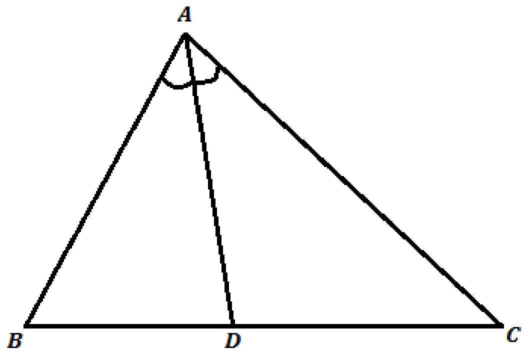
2． ◆角二等分線の定理

$\triangle ABC$の$\angle BAC$の二等分線をADとします。

このとき、

$BD:DC = AB:AC$

が成り立ちます。



3． ◆余弦定理

$\triangle ABC$について、以下の３つの関係式が成り立ちます。

$$\begin{cases} AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC \cdot CA \cdot \cos\angle ACB \\ BC^2 = CA^2 + AB^2 - 2CA \cdot AB \cdot \cos\angle BAC \\ CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle CBA \end{cases}$$

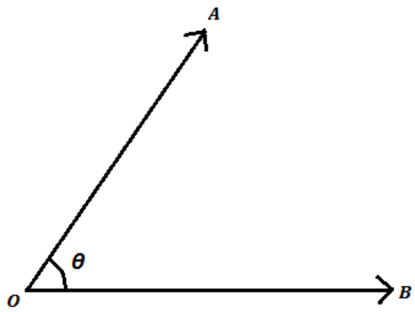
4． ◆ベクトルの内積

３つの点を$O(0,0)$,$A(a_x, a_y)$,$B(b_x, b_y)$とし、$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$のなす角を$\theta$とすると、

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$の内積は次の２通りで求められます。

Ⅰ）$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| \cos\theta$

Ⅱ）$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (a_x, a_y) \cdot (b_x, b_y) = a_x b_x + a_y b_y$



○解答・解説

【方針】

①、（ア）　$|\vec{d} - \vec{p}| = |\vec{d} - \vec{q}| = |\vec{d} - \vec{r}|$の値を求めます。$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$は全て大きさが１で既知なので、$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$を$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$で表すことを考えます。関係式が、$DP$と$DQ$と$DR$の長さが等しいことを表していることに着目すれば、点Dが外心であることが分かります。

②、③　まず線分BCの長さを求めるために図形を描き、$\triangle ABC$に着目すると、2辺の長さが分かっているので内角の1つが分かれば余弦定理(**原則3**)から求められます。次に$\vec{a}\cdot\vec{c}$を求めるには、$\vec{a},\vec{c}$の大きさはいずれも既知であることから**原則4**より$\vec{a},\vec{c}$の成す角、つまり$\angle AOC$の値が必要ですが、これも図形的に分かります。

（イ）　四角形$OABC$はひし形なので、$\vec{b}$は$\vec{a}$と$\vec{c}$の合成であることが分かります。
④、⑤　$\overrightarrow{PS}$を$\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}$で表します。点$S$が線分$QR$上にあることと、線分$PS$が$\angle QPR$の角二等分線であることから**原則2**より$QS:SR$が分かり、$\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}$で表すことが出来ます。そして$\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}$を$\vec{a},\vec{c}$で表します。

（ウ）、⑥　点Uは$\triangle PQR$の角二等分線の交点であるので、内心であることが分かります。点O,U,Bが一直線上にあることから、$OB:OU$の比を求めることで$\overrightarrow{OU}$を$\vec{b}$で表すことが出来ますが、その比を求めるときに角二等分線の定理(**原則2**)を利用します。

【解説】
$\vec{p},\vec{q},\vec{r}$を$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$で表します。
P,Q,Rはそれぞれ線分AB,BC,CAの中点であるので、

$$\vec{p}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{q}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right),\vec{r}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})\qquad\left(\leftarrow \textbf{原則1}\right)$$

また、$\vec{d}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$なので

$$\left|\vec{d}-\vec{p}\right|=\left|\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)-\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}\vec{c}\right|$$

$$\left|\vec{d}-\vec{q}\right|=\left|\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)-\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}\vec{a}\right|$$

$$\left|\vec{d}-\vec{r}\right|=\left|\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)-\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})\right|=\left|\frac{1}{2}\vec{b}\right|$$

OA,OB,OCは$\triangle ABC$の外接円の半径なので、
$|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=|\vec{c}|=1$

$$\therefore\left|\vec{d}-\vec{p}\right|=\left|\vec{d}-\vec{q}\right|=\left|\vec{d}-\vec{r}\right|=\frac{1}{2}\quad\left(\rightarrow ①\right)$$

これより、$DP=DQ=DR=\frac{1}{2}$なので、DはP,Q,Rから等距離にあります。

ゆえにDは$\triangle PQR$の外接円の中心、つまり外心です。$\left(\rightarrow ア\right)$

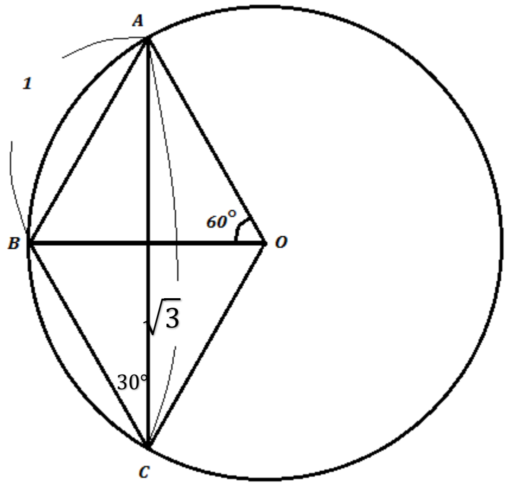
次に$AB=1, AC=\sqrt{3}$のとき、線分BCの長さを求めるために、$\triangle ABC$の 1 つの内角を求めます。

$OA=OB=1$なので、$OA=OB=AB=1$

従って$\triangle ABC$は正三角形になります。これより、$\angle AOB=60°$

円周角の定理より、弧ABに着目すると、$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=30°$

$\triangle ABC$において、余弦定理(**原則 3**)より



$AB^2=BC^2+CA^2-2BC\cdot CA\cdot\cos\angle ACB$

$\Leftrightarrow 1=BC^2+3-2BC\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 30°$

$\Leftrightarrow 1=BC^2+3-3BC$

$\Leftrightarrow BC^2-3BC+2=0$

$\Leftrightarrow (BC-1)(BC-2)=0$

$\Leftrightarrow BC=1,2$

$BC=2$とすると、BCが円の直径となり、このとき$\vec{b}=-\vec{c}$となって、$\vec{b}\nparallel\vec{c}$であることに反します。$\therefore BC=2$は不適となり、$BC=1$ $(\to ②)$

$\vec{a}\cdot\vec{c}$を求めます。

図より$\angle AOC=120°$なので、

$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\angle AOC=1\times 1\times\cos 120°=-\frac{1}{2}$ $(\to ③)$

次に$\vec{b}$を$\vec{a},\vec{c}$を用いて表します。

$\triangle OAB,\triangle OBC$はいずれも一辺が 1 の正三角形なので、四角形$OABC$はひし形です。したがって、

$\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}$ $(\to$ イ$)$

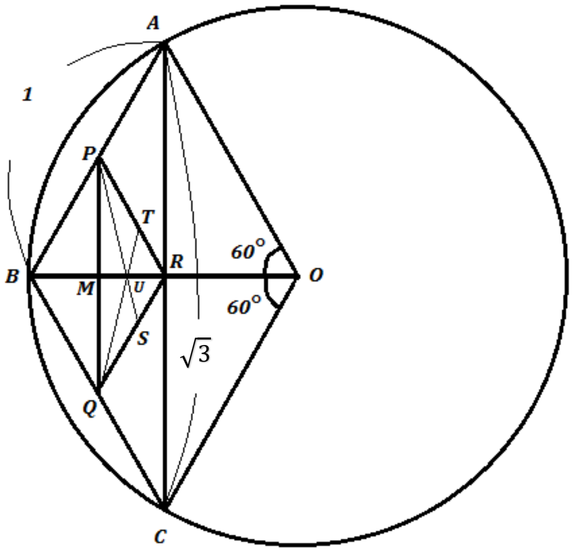
次に$\overrightarrow{PS}$を$\vec{a},\vec{c}$で表します。

線分PSは$\angle QPR$の角二等分線なので、**原則 2** より

$QS:SR=PQ:PR$

図から$\triangle ABC$について中点連結定理より、$PQ=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\triangle ABO$について中点連結定理より、$PR = \dfrac{1}{2}AO = \dfrac{1}{2}$



よって$QS:SR = PQ:PR = \dfrac{\sqrt{3}}{2}:\dfrac{1}{2} = \sqrt{3}:1$

従って　$\overrightarrow{PS} = \dfrac{\overrightarrow{PQ} + \sqrt{3}\overrightarrow{PR}}{\sqrt{3}+1}$　　$(\leftarrow$ **原則 1**$)$

ここで、$\overrightarrow{PQ}$と$\overrightarrow{PR}$を$\vec{a},\vec{c}$で表します。

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a})$$

$$\overrightarrow{PR} = \vec{r} - \vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a}) - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\{\vec{c} - (\vec{a} + \vec{c})\} \quad (\because \vec{b} = \vec{a} + \vec{c})$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{a}$$

よって　$$\overrightarrow{PS} = \frac{\frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}) + \sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\vec{a}\right)}{\sqrt{3}+1} = \frac{-(\sqrt{3}+1)\vec{a} + \vec{c}}{2(\sqrt{3}+1)} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2(\sqrt{3}+1)}\vec{c}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{\sqrt{3}-1}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}\vec{c}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}\vec{c} \qquad (\rightarrow ④、⑤)$$

点Uは線分PSと線分QTの交点です。線分PSと線分QTはいずれも$\triangle PQR$の角二等分線なので、点Uは$\triangle PQR$の内心となります。$(\rightarrow$ ウ$)$

次に$\overrightarrow{OU}$を求めます。

四角形$BQRP$について、$BQ \parallel PR, BP \parallel QR$かつ$BQ = QR = RP = PB = \dfrac{1}{2}$なので

四角形$BQRP$はひし形です。四角形$OABC$もひし形なので、$\triangle PQR$の内心Uは線分OB上にあります。
すなわち、線分OBと線分OUの比が分かれば$\overrightarrow{OU}$が求められます。
線分OBと線分PQの交点をMとすると、点Mはひし形$BQRP$の対角線の交点なので、
$BM = MR$

$MU:UR$を求めます。$\triangle PMR$に着目すると、線分PUは$\angle MPR$の角二等分線なので、

$MU:UR = PM:PR \qquad (\leftarrow$ **原則2**$)$

ここで、$PM = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad , \quad PR = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}$

従って、$MU:UR = PM:PR = \frac{\sqrt{3}}{4}:\frac{1}{2} = \sqrt{3}:2$

ここで、$MR = \frac{1}{2}BR = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}BO = \frac{1}{4}$ですから、

$$UR = \frac{1}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}+2} = \frac{1}{2(\sqrt{3}+2)} = \frac{\sqrt{3}-2}{2(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = \frac{\sqrt{3}-2}{-2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

これより、$OB:OU = OB:(OR+UR) = OB:\left(\frac{1}{2}OB+UR\right)$

$$= 1:\left(\frac{1}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = 1:\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \overrightarrow{OU} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}\vec{b} \qquad (\rightarrow ⑥)$

④命題と証明、整数問題、行列

○原則

1． ◆商と余り、倍数

aをbで割ったときの商をq、余りをrとすると

$a = bq + r$

またaがbで割り切れるとき、上の式において$r = 0$なので

$a = bq$

となります。このとき、aはbの倍数であるといいます。同時にaはqの倍数であるともいえます。

２．　◆逆行列と逆行列の存在条件

二次正方行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の逆行列を$A^{-1}$とすると、

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \left(\text{ただし、}ad-bc\neq 0\right)$$

また逆行列が存在するための必要十分条件は　$ad-bc\neq 0$

○方針・解説

【方針】

〔1〕商と余りや倍数に関する問題です。**原則 1** より$p=4k+3$(k:整数)と表せます。$2p+1$が 3 の倍数になるか素数になるかどうかを調べますが、kのままでは調べる範囲が膨大になります。そこでkを 3 で割った余り$(3n,3n+1,3n+2)$で場合分けすることで、調べるべき範囲を絞ります。

〔2〕A^{-1}の成分が整数であるためには、**原則 2** から 4 つの整数が$ad-bc$で割り切れなければなりません。直感として$|ad-bc|\neq 1$で 4 つも整数が割り切れることは考えにくいので、命題は真であると推測を立てて証明にあたります。A^{-1}の成分を全て整数とおき、a,b,c,dを別の形で表し、$ad-bc$の値を求めて1か-1になることを示します。

【解説】

〔1〕

素数pは 4 で割ると 3 余るので、整数kを用いて
$p=4k+3$と表せます。　　(←**原則 1**)

$\left(\text{i}\right)k=3n\ \left(n:\text{整数}\right)$のとき、

$p=4(3n)+3=12n+3=3(4n+1)$
これは 3 の倍数となり、pが素数であるという仮定に反します。よって$k\neq 3n$です。

$\left(\text{ii}\right)k=3n+1$ のとき、

$p=4(3n+1)+3=12n+7$
よって、$2p+1=2(12n+7)+1=24n+15=3(8n+5)$
これは 3 の倍数なので条件を満たしています。

$\left(\text{iii}\right)k = 3n + 2$ のとき、

$p = 4(3n + 2) + 3 = 12n + 11$

よって、$2p + 1 = 2(12n + 11) + 1 = 24n + 23 = 3(8n + 7) + 2$

よって 3 の倍数ではないので、これが素数であれば条件を満たします。そこでnについて$2p + 1$の値を調べてみます。

$n = 1$のとき、$2p + 1 = 24 + 23 = 47$　…これは素数です。

$n = 2$のとき、$2p + 1 = 24 \times 2 + 23 = 71$　…これは素数です。

$n = 3$のとき、$2p + 1 = 24 \times 3 + 23 = 95$

これは素数ではないので条件に反します。このとき、$p = 4(3 \times 3 + 2) + 3 = 47$で$p$は素数です。

$\therefore p = 47$のとき、$2p + 1 = 95$で 3 の倍数でも素数でもないため、命題は偽です。

〔2〕

Aの成分が全て整数なので、a, b, c, dはいずれも整数です。

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad (ad - bc \neq 0) \qquad \left(\leftarrow \textbf{原則 2}\right)$$

A^{-1}の成分も全て整数なので、整数$k, l. m. n$を用いて

$$\frac{d}{ad - bc} = k\,, \frac{-b}{ad - bc} = l\,, \frac{-c}{ad - bc} = m\,, \frac{a}{ad - bc} = n$$

とおけます。

これらを変形すると、

$$\begin{cases} a = n(ad - bc) \\ b = -l(ad - bc) \\ c = -m(ad - bc) \\ d = k(ad - bc) \end{cases}$$

となります。これらを用いて、$ad - bc$を計算すると

$$\begin{aligned} ad - bc &= n(ad - bc) \times k(ad - bc) - \{-l(ad - bc)\} \times \{-m(ad - bc)\} \\ &= (nk - lm)(ad - bc)^2 \end{aligned}$$

$ad - bc \neq 0$なので、両辺を$ad - bc$で割ると

$1 = (nk - lm)(ad - bc)$

a, b, c, d, k, l, m, nは整数なので、$nk - lm\,, ad - bc$も整数です。従って、

$(nk-lm\,,ad-bc)=(1,1)\,,(-1,-1)$

$\therefore ad-bc=\pm1 \Leftrightarrow |ad-bc|=1$となるので、命題は真です。