

東京医科大 2013 数学
略解

1

(1)ア.2 イウエ.599 (2)オ.5 カ.7 キク.16

2

(1)アイ.20 ウエ.27 オカ.17 キク.10 (2)ケコ.92

3

(1)ア.2 イ.8 ウ.1 (2)エオ.16 カ.3

4

(1)ア.9 イ.4 ウ.5 エ.4 オ.5 カ.8 (2)キク.26 ケ.3 コサ.10

配点

1 各10点 (10×2)

2 各10点 (10×2)

3 (1) 各6点 (2) 10点 (6×3+10)

4 (1) 各10点 (2) 12点 (10×2+12)

東京医科大学入試問題

2013 年数学

解答・解説編

①小問集合

○原則

(1) ◆数列 漸化式

I) 階差形の漸化式 $a_{n+1} = a_n + f(n)$

$$\text{一般項 } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \quad (n \geq 2)$$

II) 分数形の漸化式

$$a_{n+1} = \frac{Aa_n + B}{Ca_n + D}$$

i) $B = 0$ のとき、両辺の逆数をとって

$$b_n = \frac{1}{a_n} \text{とおきます。}$$

ii) $B \neq 0$ のとき、

$$x = \frac{Ax + B}{Cx + D} \text{の解を } x = \alpha, \beta \text{ として、 } b_n = \frac{1}{a_n - \alpha} \text{とおきます。}$$

ただ、誘導が付くことがほとんどですのでそれに従います。

(2) ◆三角関数 半角の公式

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}, \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}, \quad \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

◆三角関数 3倍角の公式

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta, \quad \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta$$

○解答・解説

(1)

【方針】

分数形式の漸化式で、分子の定数項が 0 です。原則の形とは少々異なりますが、両辺の逆数をとってみましょう。両辺 $n + 1$ 倍すると階差形の漸化式に帰着します。

【解説】

与えられた漸化式の両辺の逆数をとりたいので、 $a_n \neq 0$ であることを確認しておきます。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)a_n}{(3n+1)a_n + n} \dots \textcircled{1}$$

$a_1 = 1 > 0$ であり、 $a_n > 0$ と仮定すると①より $a_{n+1} > 0$ 。従って、帰納的にすべての自然数 n で $a_n > 0$

よって、①の両辺の逆数がとれて、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{(3n+1)a_n + n}{(n+1)a_n} = \frac{n}{(n+1)a_n} + \frac{3n+1}{n+1}$$

両辺 $n+1$ 倍して、

$$\frac{n+1}{a_{n+1}} = \frac{n}{a_n} + 3n+1$$

$b_n = \frac{n}{a_n}$ とおくと、

$$b_{n+1} = b_n + 3n + 1$$

即ち、数列 $\{b_n\}$ の階差数列の一般項が $3n+1$ なので、
 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k+1) \\ &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{2} \cdot (n-1)\{4 + 3(n-1) + 1\} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot (n-1)(3n+2) \\ &= \frac{3n^2 - n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2} \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{n-1} (3k+1)$ は
初項 4, 末項 $3(n-1)+1$
項数 $(n-1)$ の等差数列の和。

これは、 $n=1$ のときも成立します。よって、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{b_n} = \frac{2}{3n-1} \\ \therefore a_{200} &= \frac{2}{599} \end{aligned}$$

(2)

【方針】

$\frac{3\theta}{2}$ から、半角の公式や3倍角の公式を利用して計算ができそうです。

【解説】

3倍角の公式を使って角度を $\frac{\theta}{2}$ にします。

$$\begin{aligned}\sin \frac{3\theta}{2} &= \sin 3 \cdot \frac{\theta}{2} \\ &= 3 \sin \frac{\theta}{2} - 4 \sin^3 \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

ここで、半角の公式から

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1 - \frac{1}{8}}{2} = \frac{7}{16}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$ なので、

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

よって、

$$\begin{aligned}\sin \frac{3\theta}{2} &= 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} - 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^3 \\ &= \frac{\sqrt{7}}{4} \left(3 - 4 \cdot \frac{7}{4^2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{12 - 7}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{16}\end{aligned}$$

②小問集合

○原則

(1) ◆法線の方程式

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(a, f(a))$ における法線の方程式は、

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$

(2) ◆平均値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続、开区間 (a, b) で微分可能のとき、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad a < c < b$$

を満たす実数 c が少なくとも一つ存在する。

○解答・解説

(1)

【方針】

条件に従って、 a, b についての方程式をたてていきます。法線については、原則に従います。

【解説】

放物線 $C: y = a(x - b)^2$ は、点 $A\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ を通るので、

$$\frac{3}{5} = a\left(\frac{4}{5} - b\right)^2 \dots \textcircled{1}$$

次に、 $y' = 2a(x - b)$ より点 A における法線の方程式は、

$$y = -\frac{1}{2a\left(\frac{4}{5} - b\right)}\left(x - \frac{4}{5}\right) + \frac{3}{5}$$

となり、原点を通るので、

$$0 = -\frac{1}{2a\left(\frac{4}{5} - b\right)}\left(0 - \frac{4}{5}\right) + \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5}a = -\frac{2}{5\left(\frac{4}{5} - b\right)}$$

$$a = -\frac{2}{3\left(\frac{4}{5} - b\right)} \dots \textcircled{2}$$

②を①に代入して、

$$\frac{3}{5} = -\frac{2}{3\left(\frac{4}{5} - b\right)} \cdot \left(\frac{4}{5} - b\right)^2 = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} - b\right)$$

$$b = \frac{4}{5} + \frac{9}{10} = \frac{17}{10}$$

①に代入して、

$$a = -\frac{2}{3 \cdot \left(-\frac{9}{10}\right)} = \frac{20}{27} \quad \therefore a = \frac{20}{27} \quad b = \frac{17}{10}$$

(2)

【方針】

対数方程式を普通に解こうとすると、行き詰まります。そこで、 $\log(n+9) - \log(n+8)$ の形に着目すると、

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}$$

とみることができるので、 $f(x) = \log x$ として平均値の定理を使います。自然数 n を不等式でおさえ解をしぼります。

【解説】

$f(x) = \log x$ とおきます。(ただし、自然対数)

$$\log(n+9) - \log(n+8) = \frac{f(n+9) - f(n+8)}{(n+9) - (n+8)}$$

ここで、 n は自然数なので、 $f(x)$ は閉区間 $[n+8, n+9]$ で連続、开区間 $(n+8, n+9)$ で微分可能です。従って、平均値の定理から、

$$\frac{f(n+9) - f(n+8)}{(n+9) - (n+8)} = f'(c) = \frac{1}{c}, \quad n+8 < c < n+9 \dots \textcircled{3}$$

となる実数 c が存在します。また、

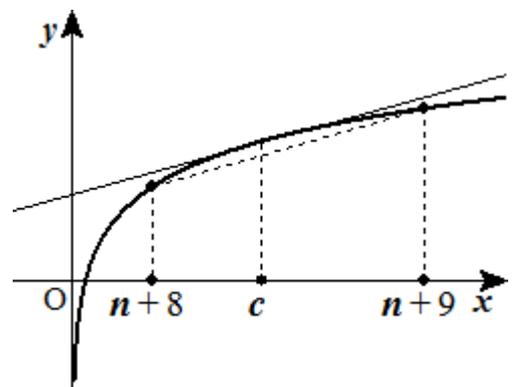
$$\log(n+9) - \log(n+8) < \frac{1}{100}$$

より、

$$\frac{1}{c} < \frac{1}{100} \quad \therefore c > 100$$

③と合わせて、 $100 < c < n+9$ なので、

$$n > 91$$



n は92以上の自然数となります。そこで、 $n = 92$ とすると、

$$\log(92 + 9) - \log(92 + 8) = \log 101 - \log 100 = \frac{1}{c}$$

かつ、 $100 < c < 101$ 即ち $\frac{1}{101} < c < \frac{1}{100}$ なので、

$$\log(92 + 9) - \log(92 + 8) < \frac{1}{100}$$

となり与えられた不等式を満たします。よって、求める自然数 n は、 $n = 92$

③二次曲線

○原則

(1) ◆楕円の方程式

$$\frac{(x - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y - y_1)^2}{b^2} = 1$$

楕円は、 $x = x_1$ で線対称であり $y = y_1$ で線対称です。

◆楕円の媒介変数表示

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(x, y)$ は、

$(x, y) = (a \sin \theta, b \cos \theta)$ で表すことができます。

楕円 $\frac{(x - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y - y_1)^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(x, y)$ は、

$(x, y) = (a \sin \theta + x_1, b \cos \theta + y_1)$ で表すことができます。

(2) ◆ベクトルの内積

$$\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2) \quad \text{のとき} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

◆三角関数の最大値・最小値

関数 $y = f(x)$ が三角関数で表されているとき、 $f(x)$ の最大値・最小値を求めるには次のことを考えます。

- I) 三角関数の統一… \sin, \cos, \tan のどれか一つに統一する。
- II) 角度を揃える。
- III) 合成する。

○解答・解説

(1)

【方針】

3点を楕円の方程式に代入して、連立方程式を解くという方法もありますが、計算が大変です。この問題では、楕円の対称性を利用すると、楕円の中心がただちに分かります。

【解説】

楕円Cは中心が (a, c) なので、直線 $x = a$, $y = c$ で線対称となります。従って、2点 $A(4, 0)$, $O(0, 0)$ の midpoint は、直線 $x = a$ 上にあるので、

$$a = \frac{4 + 0}{2} = 2$$

また、2点 $B(0, 2)$ と $O(0, 0)$ の midpoint は、直線 $y = b$ 上にあるので、

$$c = \frac{2 + 0}{2} = 1$$

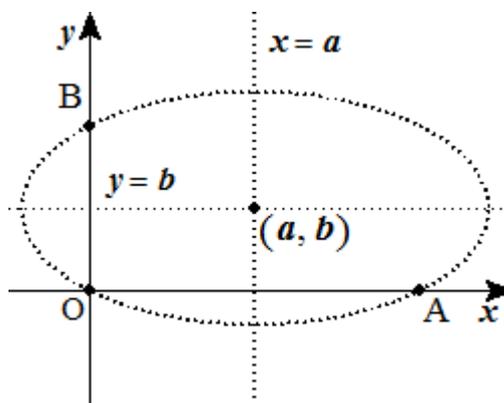
よって楕円Cは、

$$\frac{(x - 2)^2}{b} + \frac{(y - 1)^2}{2} = 1$$

また、点 $O(0, 0)$ を通るので、

$$\frac{(0 - 2)^2}{b} + \frac{(0 - 1)^2}{2} = 1 \quad \therefore b = 8$$

以上から、 $a = 2$, $b = 8$, $c = 1$



(2)

【方針】

点Pを座標で設定し、 \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{AP} を成分表示します。それに従って、内積を計算します。すると、2次関数の最小値の問題に帰着します。また、点Pの設定は、原則のように媒介変数表示を使います。

【解説】

楕円C上の点 $P(x, y)$ を媒介変数表示で、

$$x = 2\sqrt{2} \cos \theta + 2, \quad y = \sqrt{2} \sin \theta + 1 \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad \text{とおきます。}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (2\sqrt{2}\cos\theta + 2, \sqrt{2}\sin\theta + 1) \\ \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (2\sqrt{2}\cos\theta - 2, \sqrt{2}\sin\theta + 1)\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} &= (2\sqrt{2}\cos\theta + 2)(2\sqrt{2}\cos\theta - 2) + (\sqrt{2}\sin\theta + 1)^2 \\ &= 8\cos^2\theta - 4 + 2\sin^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta + 1 \\ &= 8(1 - \sin^2\theta) + 2\sin^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta - 3 \\ &= -6\sin^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta + 5 \\ &= -6\left(\sin^2\theta - \frac{\sqrt{2}}{3}\sin\theta\right) + 5 \\ &= -6\left\{\left(\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 - \frac{2}{6^2}\right\} + 5 \\ &= -6\left(\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \frac{16}{3}\end{aligned}$$

ここで、 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ なので、

$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{6}$ のとき最大値 $\frac{16}{3}$ をとります。

よって、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP}$ の最大値は、 $M = \frac{16}{3}$

④小問集合

○原則

(1) ◆関数の最大値・最小値を求める

基本の考えは、グラフを書いてグラフから最大値・最小値を読み取ることです。その為に微分して増減表を書きます。

たまに、有名不等式(相加平均・相乗平均の関係など)を使って解くこともあります。

◆分数関数の扱い

分数関数 = $\frac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}$ で、(分子の次数) \geq (分母の次数)

のときは、割り算を行って、分子の次数を下げると計算がし易くなります。

(2) ◆置換積分

方法Ⅰ) $x = g(t)$ とおく。

$$\int f(x)dx = \int f(x) \frac{dx}{dt} dt = \int f(g(t))g'(t)dt$$

方法Ⅱ) $g(x) = t$ とおく。

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t) \frac{dt}{dx} dx = \int f(t)dt$$

○解答・解説

(1)

【方針】

関数 $f(x)$ の最小値を求めるには、微分して増減表を書きます。その増減表から、最小値を読み取ります。別解として、関数 $f(x)$ は分数関数とみることができ、分子の次数が分母よりも大きいので、割り算をして分子の次数を下げます。

【解説】

まずは、関数 $f(x)$ を微分して増減表を書きましょう。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+4x}{1+\sqrt{x}} \\ f'(x) &= \frac{4(1+\sqrt{x}) - (1+4x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{8\sqrt{x}(1+\sqrt{x}) - (1+4x)}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \dots \textcircled{1} \\ &= \frac{4x + 8\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \end{aligned}$$

ここで、 $4x + 8\sqrt{x} - 1 = 4(\sqrt{x})^2 + 8\sqrt{x} - 1 = 0$ を、 $x \geq 0$ の範囲で解くと

$$\sqrt{x} = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1)}}{4} = \frac{-2 + \sqrt{5}}{2}$$

より、

$$x = \left(\frac{-2 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{9 - 4\sqrt{5}}{4} = \frac{9}{4} - \sqrt{5}$$

増減表より、 $x = \frac{9}{4} - \sqrt{5}$ のとき最小値をとります。

最小値を計算するときに、工夫します。

$$\alpha = \frac{9}{4} - \sqrt{5}$$

とおくと、 $f'(\alpha) = 0$ で①から

x	0	...	$\frac{9}{4} - \sqrt{5}$...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	1	↘	最小値	↗

$$8\sqrt{\alpha}(1 + \sqrt{\alpha}) - (1 + 4\alpha) = 0 \dots \textcircled{2}$$

よって、

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{1 + 4\alpha}{1 + \sqrt{\alpha}} = 8\sqrt{\alpha} \quad (\because \textcircled{2}) \\ &= 8 \cdot \frac{-2 + \sqrt{5}}{2} = 4\sqrt{5} - 8 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{9}{4} - \sqrt{5} \text{ のとき、最小値 } 4\sqrt{5} - 8$$

計算のポイント

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \text{ とします。}$$

$$f'(x) = \frac{h'(x)g(x) - h(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$f'(\alpha) = 0$ のとき、

$$h'(\alpha)g(\alpha) - h(\alpha)g'(\alpha) = 0$$

$$\text{従って、} f(\alpha) = \frac{h(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{h'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

[別解]

$f(x)$ が分数関数のように見えますね。例えば、 $t = \sqrt{x}$ とおくと

$$\frac{1 + 4x}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1 + 4t^2}{1 + t}$$

これは t についての分数関数です。そのうえ、分子のほうが分母よりも次数が大き

いので、割り算していく方法が考えられます。ここでは、 $t = 1 + \sqrt{x}$ とおくとさらに計算がし易くなります。

$t = 1 + \sqrt{x}$ とおくと $t \geq 1$ 、また

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 + 4(t-1)^2}{t} = \frac{4t^2 - 8t + 5}{t} \\ &= 4t - 8 + \frac{5}{t} = 4t + \frac{5}{t} - 8 \end{aligned}$$

$4t > 0$, $\frac{5}{t} > 0$ より、相加平均・相乗平均の関係から、

$$4t + \frac{5}{t} \geq 2\sqrt{4t \cdot \frac{5}{t}} = 4\sqrt{5}$$

従って、 $f(x) \geq 4\sqrt{5} - 8$

等号成立は $4t = \frac{5}{t}$ のときで、

$$t^2 = \frac{5}{4}$$

$$t = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (\text{これは、} t \geq 1 \text{ を満たす})$$

相加平均・相乗平均の関係

$a > 0, b > 0$ のとき、

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

等号成立は、 $a = b$ のとき。

即ち、

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-2 + \sqrt{5}}{2}$$

よって、

$$x = \left(\frac{-2 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{9}{4} - \sqrt{5} \text{ のとき、最小値 } 4\sqrt{5} - 8$$

(2) (1)より、 $x \geq 0$ のとき $f(x) > 0$

従って、

$$S = \int_0^1 \frac{1+4x}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$t = 1 + \sqrt{x} \text{ とおくと、} x = (t-1)^2 \quad \frac{dx}{dt} = 2(t-1)$$

$$S = \int_1^2 \frac{1 + 4(t-1)^2}{t} \cdot 2(t-1) dt$$

$$= 2 \int_1^2 \frac{4t^2 - 8t + 5}{t} \cdot (t-1) dt$$

$$= 2 \int_1^2 \left(4t^2 - 12t + 13 - \frac{5}{t} \right) dt$$

$$= 2 \left[\frac{4t^3}{3} - 6t^2 + 13t - 5 \log |t| \right]_1^2$$

$$= 2 \left\{ \frac{4}{3} (2^3 - 1) - 6(2^2 - 1) + 13(2 - 1) - 5 (\log 2 - \log 1) \right\}$$

$$= 2 \left(\frac{28}{3} - 18 + 13 - 5 \log 2 \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{13}{3} - 5 \log 2 \right)$$

$$= \frac{26}{3} - 10 \log 2$$

x	$0 \rightarrow 1$
t	$1 \rightarrow 2$