Q.　（基礎問題精講数学 2B P10　例題 4　）
解説の補助をお願いします。

A. (3)の解説を、多項定理の成り立ちを交えながら説明します。

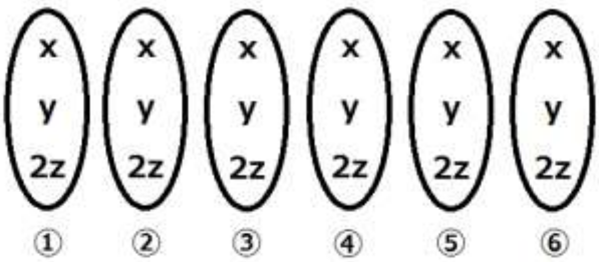
多項定理を導くにあたって、多項式同士の積は**それぞれの()の中から項を 1 つずつ選び、選んだ項をかけ、それらを足していく**と考えます。

したがって全て展開したときの項の数は、**各()内の項の数の積**になります。
例)

$$
\begin{aligned}
(a+b)(c+d+e) &= a(c+d+e)+b(c+d+e)\\
&= ac+ad+ae+bc+bd+be
\end{aligned}
$$

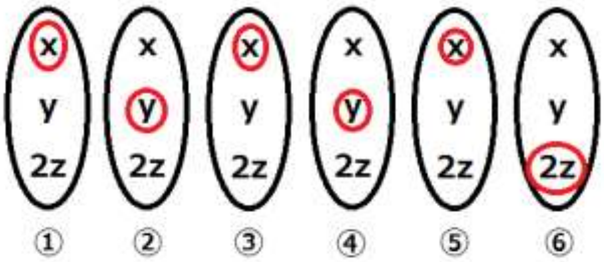
上の例では 2 つの項と 3 つの項なので、全て展開すると 2×3=6 つの項ができます。

本問は$(x+y+2z)^6$、つまり x+y+2z という多項式を 6 つかけたものです。このうちx^3y^2zの係数を求めますが、これをまともに全て展開しようとすると、一つの()に 3 つの項があるので$3\times3\times3\times3\times3\times3=3^6=729$の項が出てくるので、もっと効率のよい方法を考えます。



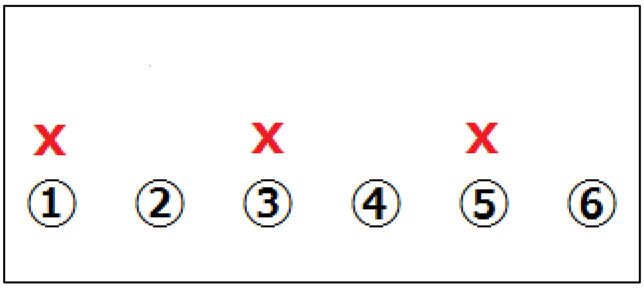
①～⑥まで番号の振られたテーブルがあり、どのテーブルにも x,y,2z が 1 つずつ置いてあります。あなたは①～⑥の各テーブルから x,y,2z のうち 1 つだけずつ選びます。選んだ 6 つの項を全て掛けてやります。

このようにして文字の部分がx^3y^2zとなるときを考えましょう。

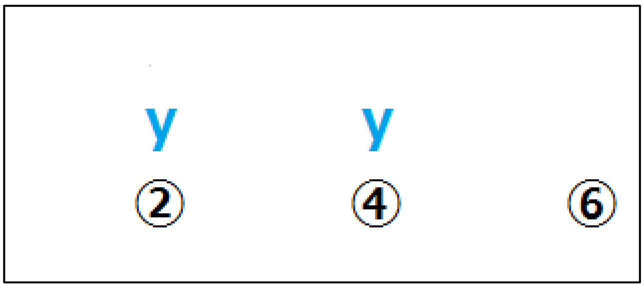


$= x \times y \times x \times y \times x \times 2z$

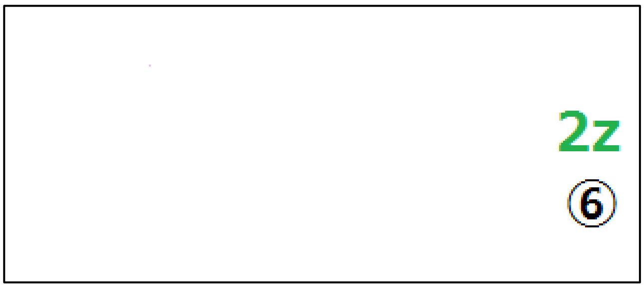
各項の次数が 1 なので、(右肩の数字)=(その項を選んだ回数)となります。したがって **x を 3 つ、y を 2 つ、2z を 1 つ取ればx^3y^2zができます。** まずは場合の数の組み合わせの考え方で **x を 3 つ、y を 2 つ、2z を 1 つ取る**通り数を計算しましょう。



まずは 6 つのテーブルから x を取るテーブルを 3 つ選びます。その選び方は 6C3 通りです。



次に残った 3 つのテーブルから y を取るテーブルを 2 つ選びます。その選び方は 3C2 通りです。



最後に残った 1 つのテーブルから 2z を取ります。その取り方は(あえて書けば)1C1 通りです。

これよりx^3y^2zとなる項の取り方は 6C3×3C2×1C1

これを階乗(！)で書き換えます。

6C3×3C2×1C1

$$=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\times\frac{3\cdot2}{1\cdot2}\times\frac{1}{1}$$

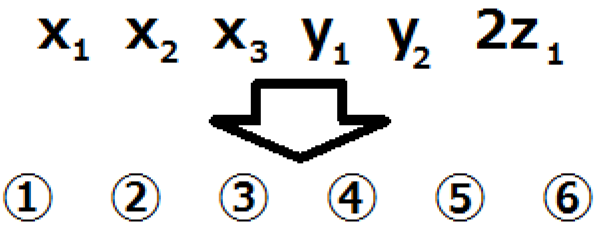
$$=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(1\cdot2\cdot3)(1\cdot2)\cdot1}=\frac{6!}{3!\,2!\,1!}=60$$

これは多項定理に当てはめた式と同じです。この式は「**x を 3 つ、y を 2 つ、2z を 1 つ選んで$x^3\times y^2\times 2z$となる項が全部で 60 ある**」ということなので、2z の 2 に注意して

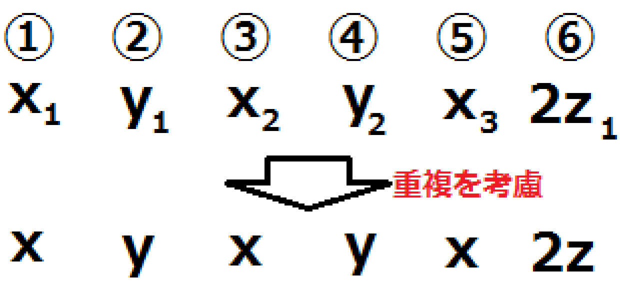
2×60=120

これでx^3y^2zの係数が 120 と分かります。

あるいは重複を含む順列の考え方でも求められます。



x の項を 3 つ、y の項を 2 つ、2z の項を 1 つ取ることは組合せのときと同じです。**まずは同じものにx_1, x_2, x_3…などと番号を振ります。**これを①～⑥の順番に並べます。**いまは全て異なるものを並べている**ので、その並べ方は 6!通りです。



ただし、3 つの x、2 つの y は**本来区別をせず同じものとして扱います。**この重複を考慮すると、x について 3!通り、y について 2!通り、z について(あえて書けば)1!通りの重複があるので、結局①～⑥までの、重複を考慮した並べ方は

$$\frac{6!}{3!\,2!\,1!}=60$$

となって組み合わせの時と同じ式となりました。
あとは組み合せのときと同じように、$2z$ の 2 に注意して
$2 \times 60 = 120$

以上のように組み合せ、重複を含む順列の 2 つの考え方で多項定理が導き出せますので、どちらもしっかりと頭に入れておきましょう。**公式の成り立ちを理解しておくことは公式を覚えやすくするだけでなく、仮に公式を忘れてしまっても思い出しやすくなるので効果的です。**