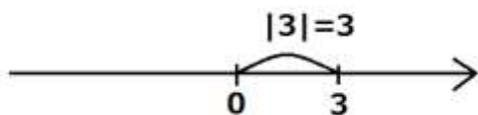


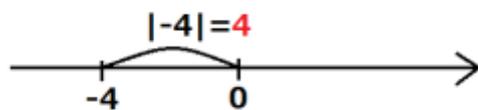
Q.(基礎問題精講数学 1A P34 例題 19)

解説の補助をお願いします。

A.まず絶対値の定義からおさらいしましょう。絶対値とは「数直線上のある点と原点との距離」です。距離なら値は絶対に0以上にならなければいけません。



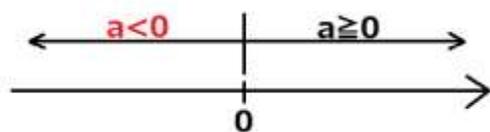
例えば3の絶対値を考えると、 $|3|$ は左に示すような距離を表します。したがって $|3|=3$ です。



ところが-4の絶対値を考えると、 $|-4|$ は左に示すような距離を表します。したがって $|-4|=4$ です。

この例から、原点よりも右側に点があれば $||$ 内の値がそのまま絶対値になりますが、原点よりも左側にあるときは $||$ 内の値の符号を変えたものが絶対値となることが分かります。

このことを式化すると次のことが言えます。



$$\begin{cases} a \geq 0 \text{ のとき、} |a| = a \\ a < 0 \text{ のとき、} |a| = -a \end{cases}$$

$||$ 内に文字が含まれるときは文字の値によって $||$ 内が正であったり負であったりします。そこでまず $||$ 内が0以上か0未満かで場合分けが必要になります。このことを踏まえて本問の考え方を説明します。

(1)不等式に $|x-3|$ という文字を含んだ絶対値があります。これを見たらすぐさま $||$ 内の正負で(i)(ii)の場合分けをします。

(i) $x-3 \geq 0$ のとき $\Leftrightarrow x \geq 3$ のとき、絶対値は $||$ 内の数と一致するので $|x-3| = x-3$

よって絶対値を外すと、不等式は

$$x-3 < 2 \Leftrightarrow x < 5$$

ゆえに $3 \leq x < 5$ ←(x \geq 3 を忘れずに！)

(ii) $x-3 < 0$ のとき $\Leftrightarrow x < 3$ のとき、絶対値は || 内の数の符号を変えたものなので

$$|x-3| = -(x-3)$$

よって絶対値を外すと、不等式は

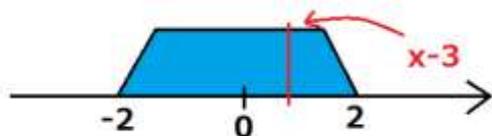
$$-(x-3) < 2 \Leftrightarrow -x+3 < 2$$

$$\Leftrightarrow -x < -1 \Leftrightarrow x > 1$$

ゆえに $1 < x < 3$ ←(x<3 を忘れずに！)

(i)(ii)を合わせると、

$$1 < x < 5$$



(別解)絶対値の定義に従うと次のような考え方もできます。

$|x-3|$ が 2 未満である $\Leftrightarrow x-3$ と原点(0)の距離が 2 未満であるということです。

これを数直線で示すと上の通りです。

したがって $x-3$ は -2 と 2 の間であれば良いので

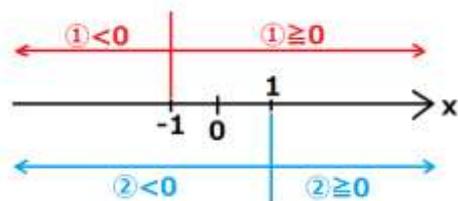
$$-2 < x-3 < 2$$

各辺に 3 を足して $1 < x < 5$

$$(2) |x+1| + |x-1| < 4$$

これも同じく個々の絶対値に対して、||内の正負で場合分けが必要になります。 $x+1=①$ 、 $x-1=②$ とすると、

①、②の正負は x の値によって下のように変化します。



したがって $x \geq 1$ のとき、 $-1 \leq x < 1$ のとき、 $x < -1$ のときの 3 通りで場合分けが必要です。

(i) $x \geq 1$ のとき

①、②はどちらも0以上なので、 $|x+1| = x+1$ 、 $|x-1| = x-1$

よって不等式は

$$(x+1) + (x-1) < 4$$

$$\Leftrightarrow 2x < 4 \Leftrightarrow x < 2$$

ゆえに $1 \leq x < 2$ ←($x \geq 1$ を忘れずに！)

(ii) $-1 \leq x < 1$ のとき

①は0以上②は負なので、 $|x+1| = x+1$ 、 $|x-1| = -(x-1)$

よって不等式は

$$(x+1) - (x-1) < 4$$

$$\Leftrightarrow 2 < 4$$

これは明らかに x によらず常に成立します。

ゆえに $-1 \leq x < 1$ ←($-1 \leq x < 1$ を忘れずに！)

(iii) $x < -1$ のとき、

①、②はどちらも負なので、 $|x+1| = -(x+1)$ 、 $|x-1| = -(x-1)$

よって不等式は

$$-(x+1) - (x-1) < 4$$

$$\Leftrightarrow -2x < 4$$

$$\Leftrightarrow x > -2$$

ゆえに $-2 < x < -1$ ←($x < -1$ を忘れずに！)

(i)~(iii)を合わせて

$$-2 < x < 2$$

絶対値についてはまず定義を必ず覚えましょう。それから方程式や不等式に絶対値が出てきた場合、絶対値を外すことが必要になります。(1)の場合分けは比較的理解しやすいと思いますが、(2)のような複数の絶対値があるときの場合分けのやり方に慣れておきましょう。