日医 2013 数学

略解

I

問1．$k=3,\ 4$　問2．$P=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}$

問3．$P^2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $Q^2=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}$, $PQ=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $QP=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

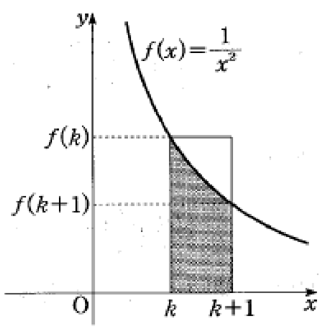
問4．$A^n=\begin{pmatrix}3^{n+1}-2\cdot4^n & -2\cdot3^n+2\cdot4^n\\ 3^{n+1}-3\cdot4^n & -2\cdot3^n+3\cdot4^n\end{pmatrix}$　問5．$k=4,\ a=3$

問6．$N^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$　問7．$C^n=\begin{pmatrix}(4-2n)\cdot4^{n-1} & n\cdot4^{n-1}\\ -n\cdot4^n & (4+2n)\cdot4^{n-1}\end{pmatrix}$

II

問1．$x>0$ で $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ とおくと，$f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}<0$ より $f(x)$ は単調減少。

$f''(x)=\dfrac{6}{x^4}>0$ より $f(x)$ は下に凸。



右図より

$$f(k+1)<\int_k^{k+1}f(x)dx<f(k)\quad\cdots\cdots①$$

①の左側の不等式より

$$\sum_{k=m-1}^{n-1}f(k+1)<\sum_{k=m-1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)dx$$

$$f(m)+f(m+1)+\cdots+f(n)<\int_{m-1}^{m}f(x)dx+\int_{m}^{m+1}f(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^{n}f(x)dx$$

ここで，(右辺)$=\displaystyle\int_{m-1}^{n}f(x)dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{m-1}^{n}=-\frac{1}{n}+\frac{1}{m-1}=\frac{n+1-m}{n(m-1)}$ より

$$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n+1-m}{n(m-1)}\quad\cdots\cdots②$$

①の右側の不等式より

$$\sum_{k=m}^{n}\int_k^{k+1}f(x)dx<\sum_{k=m}^{n}f(k)$$

$$\int_m^{m+1}f(x)dx+\int_{m+1}^{m+2}f(x)dx+\cdots+\int_n^{n+1}f(x)dx<f(m)+f(m+1)+\cdots+f(n)$$

ここで，(左辺)$=\displaystyle\int_m^{n+1}f(x)dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_m^{n+1}=-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{m}=\frac{n+1-m}{m(n+1)}$ より

$$\frac{n+1-m}{m(n+1)}<\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\quad\cdots\cdots③$$

②，③より

$$\frac{n+1-m}{m(n+1)}<\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n+1-m}{n(m-1)}$$　(証明終)

問２．問１で $m=2$ とすると

$$\frac{n-1}{2(n+1)}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}$$

両辺に１を加えて

$$\frac{3n+1}{2(n+1)}<1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{2n-1}{n}$$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{3}{2}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2$

より

$$\frac{3}{2}\leqq\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\leqq 2$$ （証明終）

問３．問１で $m=4$ とすると

$$\frac{n-3}{4(n+1)}<\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-3}{3n}$$

辺々に $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}=\frac{49}{36}$ を加えると

$$\frac{n-3}{4(n+1)}+\frac{49}{36}<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-3}{3n}+\frac{49}{36}$$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n-3}{4(n+1)}+\frac{49}{36}\right\}=\frac{1}{4}+\frac{49}{36}=\frac{29}{18}$，

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{3n}+\frac{49}{36}\right)=\frac{1}{3}+\frac{49}{36}=\frac{61}{36}$ より

$$\frac{29}{18}\leqq\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\leqq\frac{61}{36}$$ （証明終）

Ⅲ

問 1. $I_0(x)=\int\frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{1}{x}+C$ （Cは積分定数）

$$I_{k+1}(x)=(k+1)I_k(x)-\frac{(logx)^{k+1}}{x}$$

$$I_4(x)=-\frac{24}{x}-\frac{24logx}{x}-\frac{12(logx)^2}{x}-\frac{4(logx)^3}{x}-\frac{(logx)^4}{x}+C_4$$ （C_4は積分定数）

問２．$g(x)=\frac{3}{e}x^{\frac{1}{3}}-\log x$ とおく。

$g'(x)=\frac{1}{e}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{x}=\frac{x^{\frac{1}{3}}-e}{ex}$ より，$x=e^3$ のとき $g'(x)=0$ となる。

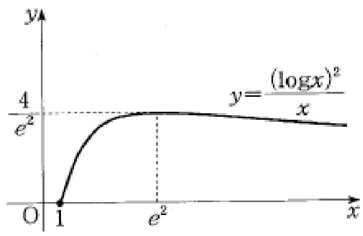
よって，増減表は右のようになり，$x>0$ で $g(x)\geqq 0$

よって，$\frac{3}{e}x^{\frac{1}{3}}\geqq\log x$ が成り立つ（等号成立は $x=e^3$ のとき）。 （証明終）

x	0	$\cdots$	e^3	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	0	↗

問３．(a)

x	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{4}{e^2}$	↘	(0)
			極大		



(b) $S_n=\dfrac{7}{3}(\log n)^3$

(c) $V_n=\dfrac{\pi}{n^2}\Big\{(n-16)(\log n)^4+4(n-8)(\log n)^3+12(n-4)(\log n)^2$

$+24(n-2)\log n+24(n-1)\Big\}$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{nV_n}{(\log n)S_n}=\frac{3}{7}\pi$

配点

［Ⅱ］問１　８点　問２、３ 各１５点（８＋１５×２）

［Ⅲ］問１８＋８点　問２　１０点　問３　(a)(b) 各８点　(c)(d) 各１０点

（８×２＋１０＋８×２＋１０×２）

※［Ｉ］の行列は除く。

日本医科大学入試問題

2013年数学

解答・解説編

[Ⅰ]行列の固有値、行列のn乗

〇原則

1. ◆逆行列

行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$について、$\Delta=ad-bc$とすると

$\Delta\neq 0$のとき、Aの逆行列が存在し、$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$となります。

$\Delta=0$のとき、Aの逆行列は存在しません。

2. ◆A^nの求め方

(ⅰ)$PQ=QP$、すなわち、交換可能となる行列P、Qに対して、$A=aP+bQ$と表されるとき、$A^n=(aP+bQ)^n$の右辺を二項定理の要領で展開します。

(ⅱ)特に、$P^2=P$、$Q^2=Q$、$PQ=QP=O$のとき、$A^n=a^nP+b^nQ$となります。

3. ◆ケーリー・ハミルトンの定理

行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$について

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

が成り立ちます。

〇解答・解説

【方針】

問1　原則1.より、逆行列をもたないとき、$\Delta=0$であることからkを求めます。

問2　与えられたA、Eの2式を、連立方程式として、P、Qについて解きます。

問3　問2の結果を用いて計算します。

　[別解] 原則3.より、ケーリー・ハミルトンの定理を用いて次数を下げて求めます。

問4　問3の結果を利用することを考え、原則2.の(ⅱ)を利用します。

　[別解] ケーリー・ハミルトンの定理による結果が

$$A^2-(\alpha+\beta)A+\alpha\beta E=O$$

　になるとき、$A^2-\alpha A=\beta(A-\alpha E)$、$A^2-\beta A=\alpha(A-\beta E)$と変形できることを利用します。

問5　逆行列をもたないような定数kがただ1つしかないことを、$\Delta=0$となる定数kが

ただ 1 つしかないと読み替え、判別式を利用します。

問 6　題意にしたがって計算します。

　[別解] ケーリー・ハミルトンの定理を利用します。

問 7　問 6 の結果を利用することを考え、$N^2 = O$より、$N^n = O\ (n \geqq 2)$であることに着目します。また、$C = N + 4E$より、$NE = EN$、すなわち、N、Eが交換可能なので、原則 2.の(ⅰ)を利用します。$n = 1$でも成り立つか確認するのを忘れないようにします。

　[別解] 問 4[別解]と同様に問 6[別解]で得られた⑩を変形しますが、1 通りしか得られません。そこで、両辺を4^nで割って等差数列として考えます。

【解説】

問 1　$A - kE = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k & 2 \\ -3 & 6-k \end{pmatrix}$が逆行列をもたないとき、

$\Delta = ad - bc = 0$であるから、

$$\Delta = (1-k)(6-k) - (-3) \cdot 2 = 0$$

$$(k-4)(k-3) = 0$$

すなわち、$k = 3, 4$…(答)

問 2　$\alpha < \beta$より、問 1 より、$\alpha = 3$、$\beta = 4$です。

$$3P + 4Q = A \cdots\cdots ①$$

$$P + Q = E \cdots\cdots ②$$

とおくと、②×4−①より

$$P = 4E - A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdots (答)$$

また、①−②×3 より

$$Q = A - 3E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdots (答)$$

問 3　それぞれ計算して求めると

$$P^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-6 & -6+4 \\ 9-6 & -6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdots (答)$$

$$Q^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-6 & -4+6 \\ 6-9 & -6+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdots (答)$$

$$PQ=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2\\-3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+6&6-6\\-6+6&6-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdots(\text{答})$$

$$QP=\begin{pmatrix}-2&2\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+6&4-4\\-9+9&6-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdots(\text{答})$$

[別解]

$P=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}$において、ケーリー・ハミルトンの定理より

$$P^2-(3-2)P+\{3(-2)-3(-2)\}E=O$$
$$\therefore P^2=P\cdots(\text{答})$$

Qについても同様に

$$Q^2-(-2+3)Q+\{-2\cdot3-(-3)\cdot2\}E=O$$
$$\therefore Q^2=Q\cdots(\text{答})$$

$A=\begin{pmatrix}1&2\\-3&6\end{pmatrix}$において、ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2-7A+12E=O\cdots\cdots⑦$$

問 2 より、$P=-(A-4E)$、$Q=A-3E$だから

$$PQ=-(A-4E)(A-3E)=-(A^2-7A+12E)=O\cdots(\text{答})$$

同様に

$$QP=-(A-3E)(A-4E)=O\cdots(\text{答})$$

問 4　問 3 の結果より、

$$P^2=P、Q^2=Q、PQ=QP=O\cdots\cdots③$$

また、問 2 より、$A=3P+4Q$と表せるから、A^2を求めてみると、

$$A^2=(3P+4Q)(3P+Q)=3P^2+12PQ+12QP+4^2Q^2=3^2P+4^2Q$$

となり、$A^n=3^nP+4^nQ\cdots$(a)と予想されます。これを数学的帰納法により証明します。

（ⅰ）$n=1$のとき、$A=3P+4Q$より、(a)が成り立ちます。

（ⅱ）$n=k$のとき、(a)が成り立つと仮定すると

$$A^k=3^kP+4^kQ$$

となります。よって、③を用いて

$$\begin{aligned}A^{k+1}=A^kA&=\left(3^kP+4^kQ\right)(3P+4Q)\\&=3^{k+1}P^2+3^k\cdot4PQ+4^k\cdot3QP+4^{k+1}Q^2\\&=3^{k+1}P+4^{k+1}Q\end{aligned}$$

したがって、$n=k+1$のときも(a)が成り立ちます。
(ⅰ)(ⅱ)より、(a)はすべての自然数nで成り立ちます。以上より、

$$A^n=3^nP+4^nQ=3^n\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}+4^n\begin{pmatrix}-2&2\\-3&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3^{n+1}-2\cdot 4^n & -2\cdot 3^n+2\cdot 4^n\\3^{n+1}-3\cdot 4^n & -2\cdot 3^n+3\cdot 4^n\end{pmatrix}\cdots(\text{答})$$

[別解]
問 3 の⑦$A^2-7A+12E=O$は 2 通りに変形ができ

$A(A-3E)=4(A-3E)$……⑧

$A(A-4E)=3(A-4E)$……⑨

⑧の両辺にAをかけると
$A^2(A-3E)=4A(A-3E)=4^2(A-3E)$
これを繰り返すことで

$A^n(A-3E)=4^n(A-3E)$……⑧'

同様にして⑨は

$A^n(A-4E)=3^n(A-4E)$……⑨'

⑧'−⑨'を計算すると

$$A^n=4^n(A-3E)-3^n(A-4E)=4^n\begin{pmatrix}1-3&2\\-3&6-3\end{pmatrix}-3^n\begin{pmatrix}1-4&2\\-3&6-4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2\cdot 4^n+3^{n+1} & 2\cdot 4^n-2\cdot 3^n\\-3\cdot 4^n+3^{n+1} & 3\cdot 4^n-2\cdot 3^n\end{pmatrix}\cdots(\text{答})$$

問 5

$$C=A+B=\begin{pmatrix}1&2\\-3&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a-2&-1\\a^2-2a-4&2a-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1&1\\a^2-2a-7&2a\end{pmatrix}\cdots\cdots④$$

$$C-kE=\begin{pmatrix}a-1&1\\a^2-2a-7&2a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1-k&1\\a^2-2a-7&2a-k\end{pmatrix}$$

が逆行列をもたないとき、問 1 と同様にして

$\Delta=(a-1-k)(2a-k)-1\cdot(a^2-2a-7)=0$

$k^2+(-3a+1)k+a^2+7=0$……⑤

題意より、これを満たす定数kの値がただ 1 つしかないから、判別式Dについて

$D=(-3a+1)^2-4(a^2+7)=5a^2-6a-27=0$

$$(5a+9)(a-3)=0$$

が成り立ちます。$a>0$であるから、$a=3$…(答)

また、⑤は$k^2-8k+16=0$となるから、$k=4$…(答)

問 6　問 5 より、$k=4$であるから

$$N=C-4E=\begin{pmatrix}3-1-4 & 1\\ 9-6-7 & 6-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$$

よって

$$N^2=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-4 & -2+2\\ 8-8 & -4+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdots(答)$$

[別解]

$C=\begin{pmatrix}3-1 & 1\\ 9-6-7 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & 6\end{pmatrix}$について、ケーリー・ハミルトンの定理より

$$C^2-8C+16E=O\cdots\cdots⑩$$

$$(C-4E)^2=O$$

$N=C-4E$であるから、$N^2=O$…(答)

問 7　$N^2=O$より、$N^n=O$……⑥となります。また、$N=C-4E$より、$C=N+4E$となります。ここで、Nと$4E$は交換可能なので、$(N+4E)^n$は文字式と同じように展開できます。すなわち

$$\begin{aligned}C^n&=(N+4E)^n\\ &=N^n+{}_nC_1N^{n-1}\cdot 4E+{}_nC_2N^{n-2}\cdot 4^2E^2+\cdots+{}_nC_{n-1}N4^{n-1}E+{}_nC_n4^nE\\ &={}_nC_{n-1}N\cdot 4^{n-1}E+{}_nC_n4^nE\ \ (\because ⑥)\\ &=n\cdot 4^{n-1}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}+4^n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}(4-2n)\cdot 4^{n-1} & n\cdot 4^{n-1}\\ -n\cdot 4^n & (4+2n)\cdot 4^{n-1}\end{pmatrix}\ \ (n\geqq 2)\cdots(答)\end{aligned}$$

これは、④で$a=3$としたものと一致するから、$n=1$のときも成り立ちます。

[別解]

問 6[別解]の⑩を変形すると

$C(C-4E)=4(C-4E)$より問 4[別解]と同様にして

$$C^n(C-4E)=4^n(C-4E)$$

両辺を4^nで割って

$$\frac{C^{n+1}}{4^n}-\frac{C^n}{4^{n-1}}=C-4E$$

ここで、数列$\left\{\frac{C^n}{4^{n-1}}\right\}$は初項$\frac{C^1}{4^0}$、公差$C-4E$の等差数列であるから

$$\frac{C^n}{4^{n-1}}=\frac{C^1}{4^0}+(n-1)(C-4E)$$

両辺に4^{n-1}をかけて

$$C^n=4^{n-1}C+4^{n-1}(n-1)(C-4E)$$

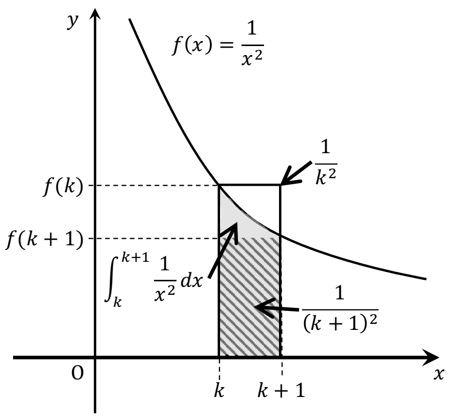
$$=4^{n-1}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & 6\end{pmatrix}+4^{n-1}(n-1)\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(-2n+4)\cdot 4^{n-1} & n\cdot 4^{n-1}\\ -n\cdot 4^n & (2n+4)\cdot 4^{n-1}\end{pmatrix}\cdots(答)$$

[Ⅱ]面積を利用した不等式の証明、極限値と不等式

〇原則

1. ◆数列の和を簡単な式で表すことができないとき、積分を利用します。すなわち、下図の 3 つの領域の面積を比較して、不等式を証明します。



2. ◆$a_n<b_n$で、それぞれが極限値をもつとき、$\lim_{n\to\infty}a_n\leqq\lim_{n\to\infty}b_n$が成り立ちます。

〇解答・解説

【方針】

問 1　与えられた不等式について、$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$は簡単な式で表すことができません。したがって、原則 1.にしたがい、積分を利用します。

原則 1. の図において、$f(k+1)<\int_k^{k+1} f(x)\,dx<f(k)$であることを利用して、不等式を証明します。

問 2　問 1 の結果を利用することを考えますが、問 1 ではmがあるため、そのまま使うことはできません。そこで、mの値を色々代入してみます。$m=0$では問 1 の左辺の分母が、$m=1$では右辺の分母が 0 になるので、$m=2$を代入すると

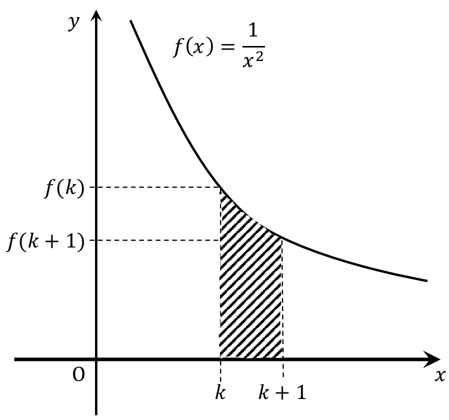
$$\frac{n-1}{2(n+1)}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}$$

となります。これを証明する不等式と合わせるため、辺々に 1 を加え、極限を求めます。不等号については、原則 2.を利用します。

問 3　問 2 と同様に、$m=3,4,\cdots$と代入してみると、数列の範囲が狭められ、より正確になることがわかります。これを用いて、$m=4$を代入し、問 2 と同様に証明します。

【解説】

問 1　$x>0$ で$f(x)=\frac{1}{x^2}$とおくと、$f'(x)=-\frac{2}{x^3}<0$より、$f(x)$は単調減少します。また、$f''(x)=\frac{6}{x^4}>0$より、$f(x)$は下に凸となります。したがって、$f(x)$は右図のようになり



$f(k+1)<\int_k^{k+1} f(x)\,dx<f(k)$……①

が成り立ちます。①の左側の不等式より、

$$\sum_{k=m-1}^{n-1} f(k+1)<\sum_{k=m-1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\,dx$$

$$f(m)+f(m+1)+\cdots+f(n)<\int_{m-1}^{m} f(x)\,dx+\int_{m}^{m+1} f(x)\,dx+\cdots+\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx$$

ここで、$(\text{右辺})=\int_{m-1}^{n} f(x)\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{m-1}^{n}=-\frac{1}{n}+\frac{1}{m-1}=\frac{n+1-m}{n(m-1)}$であるから

$$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n+1-m}{n(m-1)}\text{……②}$$

①の右側の不等式より

$$\sum_{k=m}^{n}\int_{k}^{k+1} f(x)dx < \sum_{k=m}^{n} f(k)$$

$$\int_{m}^{m+1} f(x)dx + \int_{m+1}^{m+2} f(x)dx + \cdots + \int_{n}^{n+1} f(x)dx < f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

また、$(\text{左辺}) = \int_{m}^{n+1} f(x)dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{m}^{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} = \frac{n+1-m}{m(n+1)}$であるから

$$\frac{n+1-m}{m(n+1)} < \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\cdots\cdots③$$

②③より

$$\frac{n+1-m}{m(n+1)} < \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n+1-m}{n(m-1)}$$ (証明終)

問２　問１で$m = 2$とすると

$$\frac{n-1}{2(n+1)} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}$$

となります。両辺に１を加えると

$$\frac{3n+1}{2(n+1)} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{2n-1}{n}$$

ここで、$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{3}{2}$、$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right) = 2$より

$$\frac{3}{2} \leqq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) \leqq 2$$ (証明終)

問３　問１で$m = 4$とすると

$$\frac{n-3}{4(n+1)} < \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-3}{3n}$$

辺々に$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{49}{36}$を加えると

$$\frac{n-3}{4(n+1)} + \frac{49}{36} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-3}{3n} + \frac{49}{36}$$

ここで、$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n-3}{4(n+1)} + \frac{49}{36}\right\} = \frac{1}{4}$、$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n-3}{3n} + \frac{49}{36}\right\} = \frac{1}{3} + \frac{49}{36} = \frac{61}{36}$より

$$\frac{29}{18} \leqq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) \leqq \frac{61}{36}$$ (証明終)

[Ⅲ]部分積分、漸化式、グラフ、面積、回転体の体積、極限値

〇原則

1. ◆部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

2. ◆置換積分法

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

3. ◆不等式の証明

不等式$A > B$を示すためには、$A - B > 0$を証明します。A、Bがxの式であれば、$f(x) = A - B$と置き、$f(x) > 0$を示します。そのためには、$f(x)$の最小値を調べる必要があります。このときxの範囲に注意します。

4. ◆商の微分

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

5. ◆回転体の体積

$y = f(x)$と$x = a$、$x = b$　$(a < b)$およびx軸で囲まれる部分をx軸のまわりに回転して得られる立体の体積Vは

$$V = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

と表されます。

6. ◆はさみうちの原理

直接求めにくい極限を求める場合に利用します。

$a_n \leqq b_n \leqq c_n$が成り立ち、$n \to \infty$で$a_n \to \alpha$、$b_n \to \alpha$ならば、$c_n \to \alpha$となります。

〇解答・解説

【方針】

問 1　$k = 0$を代入し、$I_0(x)$を求めます。I_{k+1}とI_kをつなげるために、$(\log x)^{k+1}$から次数を落として$(\log x)^k$を作る必要があります。そのため、原則 1.より、部分積分法を利用します。I_kとI_{k+1}の関係がわかれば、$k = 0$から順番に計算して、$I_4(x)$が求まります。

問 2　不等式の証明では、原則 3.より、$g(x)=\frac{3}{e}x^{\frac{1}{3}}-\log x$として、$g(x)\geqq 0$を示します。

最小値を調べるため、$g'(x)$を求めます。また、$x>0$であること、等号成立を調べるのを忘れないようにします。

問 3(a)　凹凸を調べる必要がないので、$f'(x)$まで調べます。次に、$\lim_{x\to+\infty} f(x)$を調べますが、$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^2}{x}=0$はイメージできても直接求めるのは難しいので、問 2 の結果を利用し、原則 6.のはさみうちの原理より求めます。

(b)　積分により、面積を求めます。$(\log x)'=\frac{1}{x}$より、$\log x=t$とおいて、原則 2.より置換積分します。

(c)　原則 5.より、体積V_nを求めます。このとき、問 1 の結果を利用します。

(d)　問 3(b)(c)で求めたS_n、V_nをそれぞれ代入します。$\lim_{n\to\infty}\log n=\infty$より、極限が求まります。

【解説】

問 1

$$I_0(x)=\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C\quad(C\text{は積分定数})$$

$$(x^m)'=mx^{m-1}$$

$$(\log|x|)'=\frac{1}{x}$$

$$I_{k+1}(x)=\int\frac{(\log x)^{k+1}}{x^2}dx$$

$$=\left(-\frac{1}{x}\right)(\log x)^{k+1}—\frac{1}{x}(k+1)(\log x)^k\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=-\frac{(\log x)^{k+1}}{x}+(k+1)\int\frac{(\log x)^k}{x^2}\,dx=-\frac{(\log x)^{k+1}}{x}+(k+1)I_k(x)$$

よって、$I_{k+1}(x)=(k+1)I_k(x)-\frac{(\log x)^{k+1}}{x}$

これを用いて

$$I_1(x)=1I_0(x)-\frac{\log x}{x}=-\frac{1}{x}-\frac{\log x}{x}+C_1\quad(C_1\text{は積分定数})$$

$$I_2(x)=2I_1(x)-\frac{(\log x)^2}{x}=-\frac{2}{x}-\frac{2\log x}{x}-\frac{(\log x)^2}{x}+C_2\quad(C_2\text{は積分定数})$$

$$I_3(x)=3I_2(x)-\frac{(\log x)^3}{x}=-\frac{6}{x}-\frac{6\log x}{x}-\frac{3(\log x)^2}{x}-\frac{(\log x)^3}{x}+C_3\quad(C_3\text{は積分定数})$$

$$I_4(x) = 4I_3(x) - \frac{(\log x)^4}{x}$$

$$= -\frac{24}{x} - \frac{24\log x}{x} - \frac{12(\log x)^2}{x} - \frac{4(\log x)^3}{x} - \frac{(\log x)^4}{x} + C_4 \quad (C_4\text{は積分定数}) \cdots (\text{答})$$

問 2　$g(x) = \frac{3}{e}x^{\frac{1}{3}} - \log x$とおくと、$g'(x) = \frac{1}{e}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{x} = \frac{x^{\frac{1}{3}} - e}{ex}$より

$x = e^3$のとき$g'(x) = 0$となります。したがって、増減表は下のようになり

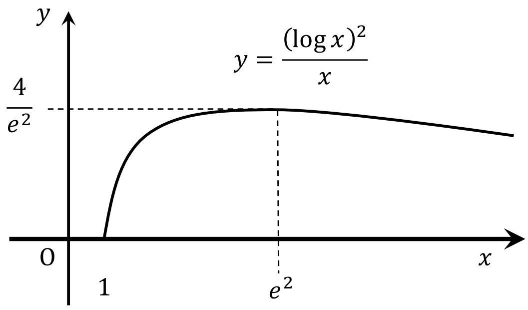
$x > 0$で$g(x) \geqq 0$

すなわち、$\frac{3}{e}x^{\frac{1}{3}} \geqq \log x$が成り立ちます（等号成立は$x = e^3$）。　　　(証明終)

x	0	$\cdots$	e^3	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	0	↗

問 3(a)　$f'(x) = \frac{2\log x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\log x)^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{\log x(2 - \log x)}{x^2}$より、増減表、グラフは下のようになります。

x	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	(0)



また、問 2 より、$x > 0$で$(\log x)^2 \leqq \frac{9}{e^2}x^{\frac{2}{3}}$

であるから、$x \geqq 1$では

$$0 \leqq \frac{(\log x)^2}{x} \leqq \frac{9}{e^2 x^{\frac{1}{3}}}$$

したがって、$0 \leqq \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^2}{x} \leqq \lim_{x\to\infty} \frac{9}{e^2 x^{\frac{1}{3}}} = 0$となるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0$$

(b)

$$S_n = \int_n^{n^2} \frac{(\log x)^2}{x} dx = \int_n^{n^2} (\log x)^2 (\log x)' dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(\log x)^3\right]_n^{n^2}$$

$$= \frac{1}{3}\{(\log n^2)^3 - (\log n)^3\}$$

$$= \frac{1}{3}\{(2\log n)^3 - (\log n)^3\} = \frac{7}{3}(\log n)^3 \ldots (答)$$

(c)　問 1 の$I_4(x)$の結果を用いて

$$V_n = \pi \int_n^{n^2} \frac{(\log x)^4}{x^2} dx$$

$$= \pi\left[-\frac{24}{x} - \frac{24(\log x)}{x} - \frac{12(\log x)^2}{x} - \frac{4(\log x)^3}{x} - \frac{(\log x)^4}{x}\right]_n^{n^2}$$

$$= \pi\left\{-\frac{24 + 48\log n + 48(\log n)^2 + 32(\log n)^3 + 16(\log n)^4}{n^2}\right.$$

$$\left. + \frac{24 + 24\log n + 12(\log n)^2 + 4(\log n)^3 + (\log n)^4}{n}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{n^2}\{(n-16)(\log n)^4 + 4(n-8)(\log n)^3 + 12(n-4)(\log n)^2 + 24(n-2)\log n$$

$$+ 24(n-1)\} \ldots (答)$$

(d)　(b)(c)の結果をそれぞれ代入して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nV_n}{(\log n)S_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{7}\pi\left\{-\frac{24}{n(\log n)^4} - \frac{48}{n(\log n)^3} - \frac{48}{n(\log n)^2} - \frac{32}{n(\log n)} - \frac{16}{n} + \frac{24}{(\log n)^4}\right.$$

$$\left. + \frac{24}{(\log n)^3} + \frac{12}{(\log n)^2} + \frac{4}{\log n} + 1\right\}$$

$$= \frac{3}{7}\pi \ \left(\because \lim_{n\to\infty} \log n = \infty\right) \ldots (答)$$