女子医 2013 物理

配点

Ⅰ.（1）各３点　（2）３点　（3）各３点　（4）各４点
　（３×２＋３＋３×３＋４×４）
Ⅱ.①～⑭ 各２点　（1）（2）各７点（２×１４＋７×２）
Ⅲ.（1）各２点　（2）各３点　（3）（4）各４点（２×２＋３×４＋４×２）

解説

[Ⅰ]　2 物体の斜め衝突による合体

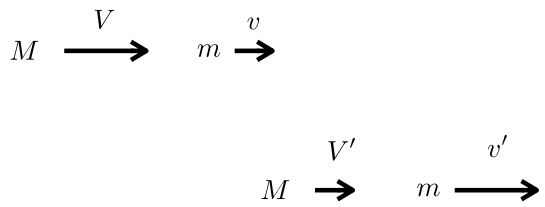
○原則

1. ◆運動量保存の法則

系の物体に内力が働くが、外力が働かないとき、運動量の総和が保たれます。
すなわち、下図の状況のとき、運動量保存の法則

$MV + mv = MV' + mv'$

が成り立ちます。



2. ◆運動エネルギー

質量mの物体が速さvで運動するとき、この物体の運動エネルギーは$\frac{1}{2}mv^2$と表されます。

3. ◆ベクトルの合成

2 つのベクトルを合成すると、2 つのベクトルからなる平行四辺形の対角線が合成ベクトルとなります。

○解答・解説

【方針】

(1)　x軸、y軸それぞれについて、衝突の前後で原則 1.の運動量保存の法則が成り立ちます。したがって、速度ベクトルをx軸、y軸に分解します。このとき、衝突後、物体 A、B が一体となったことから、質量が$M+m$となることに注意します。

(2)　(1)の結果を利用して、与えられた文字でV'を表します。すなわち、θ'を消すことを考えます。①②の右辺に着目すると、それぞれ 2 乗して和を取れば、$(M+m)^2V'^2(\sin^2\theta'+\cos^2\theta')=\{(M+m)V'\}^2$となって$\theta'$が消えることに気づきます。

(3)　M、V、θのみで表すため、与えられた条件から、vをVで表し、vを消すことを考えます。原則 2.に基づき運動エネルギーをそれぞれ求めますが、V'は(2)の結果を利用します。

(4)　運動量がベクトルで表されることを利用します。したがって、衝突後の運動量ベクトルは$M\vec{V}+m\vec{v}$となります。このとき、原則 3.を用いてベクトルを合成します。θを変化させて同様に考えると、ベクトルの先端が半円を描くことに気づきます。また、図を見ると、$\theta'_{\max}$となるのは、衝突後の運動量ベクトルがこの半円に接するときであるとわかります。

【解説】

(1)　与えられた図より、$\vec{v}$、$\vec{V}$、$\vec{V'}$をx軸、y軸に分解して考えると

x成分：$MV+mv\cos\theta=(M+m)V'\cos\theta'$……①

y成分：$mv\sin\theta=(M+m)V'\sin\theta'$……②

(2)　①²+②² より

$(MV+mv\cos\theta)^2+(mv\sin\theta)^2=(M+m)^2V'^2(\sin^2\theta'+\cos^2\theta')$

$(MV)^2+2MmVv\cos\theta+(mv)^2=\{(M+m)V'\}^2$

$\therefore\ V'=\dfrac{1}{M+m}\sqrt{(MV)^2+2MmVv\cos\theta+(mv)^2}\cdots$(答)

(3)　$m=\frac{1}{10}M$、$mv=\frac{1}{2}MV$より

$v=5V\cdots\cdots$③

したがって

$$E_0=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}M(5V)^2+\frac{1}{2}MV^2=\frac{7}{4}MV^2\cdots(\text{答})$$

また、(2)の答えを用いて

$$E_1=\frac{1}{2}(M+m)V'^2=\frac{1}{2}(M+m)\frac{1}{(M+m)^2}\{(MV)^2+2MmVv\cos\theta+(mv)^2\}$$

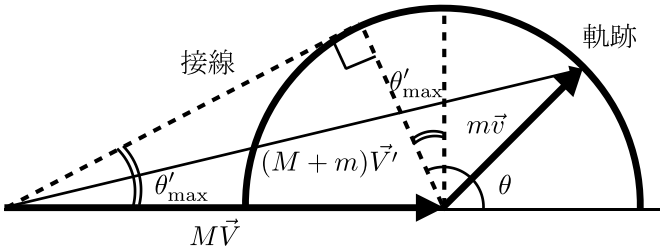
$$=\frac{1}{2\left(M+\frac{1}{10}M\right)}\left\{M^2V^2+2M\cdot\frac{1}{10}M\cdot V\cdot 5V\cos\theta+\frac{1}{4}M^2V^2\right\}$$

$$=\frac{5}{11}MV^2\left(\frac{5}{4}+\cos\theta\right)\cdots(\text{答})$$

以上より

$$\Delta E=\frac{5}{11}MV^2\left(\frac{5}{4}+\cos\theta\right)-\frac{7}{4}MV^2=\frac{1}{11}MV^2(5\cos\theta-13)\cdots(\text{答})$$

(4)　衝突後の運動量ベクトルは図の$(M+m)\vec{V'}$の矢印（$M\vec{V}$の起点と$m\vec{v}$の先端を結んだベクトル）です。したがって、このベクトルの先端が描く軌跡は、図の半円の部分になります。



また、図の直角三角形に着目すると

$$\sin\theta'_{\max}=\frac{mv}{MV}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \theta'_{\max}=30^\circ\cdots(\text{答})$

そのときのθは図より

$\theta = 90° + \theta'_{\max} = 120° \cdots$ (答)

[Ⅱ]　コンデンサーと水の位置エネルギーの対比

○原則

1. ◆コンデンサー

電気容量C[F]のコンデンサーに電圧V[V]を加えると、コンデンサーは充電され$Q = CV$の電気量が蓄えられます。また、コンデンサーに蓄えられているエネルギーは$\frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$と表されます。

2. ◆電気量保存の法則

スイッチ操作や電池の接続によって電気量の和が変化しない極板の組に対して電気量保存の法則の式と電圧の式を立てます。

3. ◆密度、体積、質量の関係

密度ρ、体積Vの物質の質量Mは、$M = \rho V$と表されます。

4. ◆位置エネルギー

高さhにある質量Mの物体の位置エネルギーは、重力加速度をgとすると、Mghとなります。

○解答・解説

【方針】

(A)　①～④ 原則1.を用いて解いていきます。②は電源によってなされる仕事、③④は蓄えられている静電エネルギーであるから$\frac{1}{2}$になることに気をつけます。

⑤ 図1においてスイッチと抵抗がない側の導線に着目して原則2.の電気量保存の法則を利用します。

⑥ ⑤で求めたV_1を代入すればよいことに気づきます。

⑦ ④⑥を利用して差を求めます。

(B)　⑧ 原則 3.を利用します。
⑨ 原則 4.を利用します。ため込む水の質量は微小量ΔMであるから、このとき水槽の水位はhのまま変化しないと考えます。

⑩ 高さはh_0ではなく、重心を考え、$\frac{h_0}{2}$となります。

⑪ ⑧を利用してh_0を消します。
⑫ A の水の減少分＝B の水の増加分と考えます。答えはM_0を用いるため、⑧を利用してh_0を消します。
⑬ ⑫の結果を利用してh_1を消します。
⑭ (3)(4)式を利用することを考えます。

(C)　(1) (A)と(B)を比べると蓄えられた量としてQ_0とM_0、単位量を蓄えるのに必要なエネルギーとしてVとgh、電気容量C_Aと$\frac{\rho S_\mathrm{A}}{g}$、$C_\mathrm{A}+C_\mathrm{B}$と$\frac{\rho(S_\mathrm{A}+S_\mathrm{B})}{g}$が対応していることに気づきます。また、共に蓄えられたエネルギーが$\frac{1}{2}$になる点も類似しています。
(2) 何が移動し、どのエネルギーが減少したのかについて説明します。

【解説】
(A)　① コンデンサーA の電気容量はC_Aであるから原則 1.より
$Q_0 = C_\mathrm{A}V_0 \cdots$(答)
② コンデンサーに電荷が電圧Vで蓄えられるとき、電源によってなされる仕事は
$\Delta U_\mathrm{e} = \Delta QV \cdots$(答)
③ コンデンサーA に蓄えられている静電エネルギーは

$U_\mathrm{e0} = \frac{1}{2}Q_0V_0 \cdots$(答)

④ 原則 1.より$Q_0 = C_\mathrm{A}V_0$、③より$U_\mathrm{e0} = \frac{1}{2}Q_0V_0$から$V_0$を消去して

$U_{\mathrm{e0}} = \dfrac{1}{2C_{\mathrm{A}}} Q_0^2 \cdots$(答)

⑤ 2 つのコンデンサーの電圧はともにV_1になったから、電気量保存の法則より

$Q_0 = C_{\mathrm{A}} V_1 + C_{\mathrm{B}} V_1$

$\therefore V_1 = \dfrac{1}{C_{\mathrm{A}} + C_{\mathrm{B}}} Q_0 \cdots$(答)

⑥ V_1を代入して

$U_{\mathrm{e1}} = \dfrac{1}{2} Q_0 V_1 = \dfrac{1}{2(C_{\mathrm{A}} + C_{\mathrm{B}})} Q_0^2 \cdots$(答)

⑦ ④⑥より

$U_{\mathrm{e1}} - U_{\mathrm{e0}} = \dfrac{1}{2(C_{\mathrm{A}} + C_{\mathrm{B}})} Q_0^2 - \dfrac{1}{2C_{\mathrm{A}}} Q_0^2 = -\dfrac{C_{\mathrm{B}}}{2(C_{\mathrm{A}} + C_{\mathrm{B}})C_{\mathrm{A}}} Q_0^2 \cdots$(答)

(B) ⑧ 密度と体積の関係より、水の体積は$S_{\mathrm{A}} h_0$であるから

$M_0 = \rho S_{\mathrm{A}} h_0 \cdots$(答)

⑨ 原則 4.より

$\Delta U_{\mathrm{w}} = \Delta M g h \cdots$(答)

⑩ 質量M_0の物体が平均の高さ$\frac{h_0}{2}$にあると考えると

$U_{\mathrm{w0}} = \dfrac{1}{2} g M_0 h_0 \cdots$(答)

⑪ ⑧より$h_0 = \frac{M_0}{\rho S_{\mathrm{A}}}$であるから、これを⑩の結果に代入して

$U_{\mathrm{w0}} = \dfrac{g}{2\rho S_{\mathrm{A}}} M_0^2 \cdots$(答)

⑫ 2 つの水槽の水位がともにh_1になったとき、A の水の減少分＝B の水の増加分であるから

$S_{\mathrm{A}}(h_0 - h_1) = S_{\mathrm{B}} h_1$

$\therefore h_1 = \dfrac{S_{\mathrm{A}}}{S_{\mathrm{A}} + S_{\mathrm{B}}} h_0$

⑧より$h_0 = \frac{M_0}{\rho S_{\mathrm{A}}}$であるから、これを代入して

$$h_1 = \frac{1}{\rho(S_\mathrm{A} + S_\mathrm{B})} M_0 \cdots (答)$$

⑬ ⑫よりh_1を代入して

$$U_\mathrm{w1} = \frac{1}{2} g M_0 h_1 = \frac{g}{2\rho(S_\mathrm{A} + S_\mathrm{B})} M_0^2 \cdots (答)$$

⑭ (3)(4)式より

$$U_\mathrm{w1} - U_\mathrm{w0} = \frac{g}{2\rho(S_\mathrm{A} + S_\mathrm{B})} M_0^2 - \frac{g}{2\rho S_\mathrm{A}} M_0^2 = -\frac{g S_\mathrm{B}}{2\rho(S_\mathrm{A} + S_\mathrm{B}) S_\mathrm{A}} M_0^2 \cdots (答)$$

(C)(1)　(A)(B)から類似性を持つ物理量は、それぞれ

Q_0とM_0、Vとgh、C_Aと$\frac{\rho S_\mathrm{A}}{g}$、$C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}$と$\frac{\rho(S_\mathrm{A}+S_\mathrm{B})}{g}$

となります。

(2)　コンデンサーの静電エネルギー:コンデンサーA から B へ移動した電荷は、静電気力による位置エネルギーの低い状態になるため減少します。

水の位置エネルギー：円筒水槽 A から B へ移動した水は、重力による位置エネルギーの低い状態になるため減少します。

[Ⅲ]可変抵抗と 2 つの抵抗を含む回路

○原則

1. ◆キルヒホッフの第一法則

回路の任意の分岐点において、流入する電流の和と流出する電流の和は等しくなります。

2. ◆キルヒホッフの第二法則

閉じた回路を一回りするとき電位差の和は 0 になります。

3. ◆電力

電力は単位時間に電流がする仕事であり、電流をI、電圧をV、抵抗をRとすると

$$P = IV = \frac{V^2}{R}$$

となります。

4. ◆合成抵抗

2 つの抵抗をR_1、R_2とおくと、合成抵抗Rは

・抵抗の直列接続

$R = R_1 + R_2$

・抵抗の並列接続

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

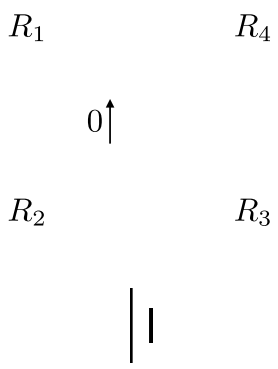
となります。

5. ◆ホイートストーンブリッジ

図のように中央の抵抗に電流が流れないとき

$R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4$

が成り立ちます。



〇解答・解説

【方針】

(1)　方針 1.のキルヒホッフの第一法則を B、E に適用します。

(2)　図が紛らわしいですが、$x = 0$と$x = 1$ではともにショート回路となることがわかります。また、原則 3.より電力を求めます。

(3)　キルヒホッフの第一法則、キルヒホッフの第二法則、$I=0$より電圧降下が等しいことから未知数I_1、I_2、I_3、I_4、xに対して 5 つの連立方程式を立てます。
[別解]　原則 5.のホイートストーンブリッジとして考えることもできます。

(4)　$I \neq 0$のため、A と BE 間、BE と C 間に分けて、原則 4.を用いて、それぞれについて抵抗の並列接続、さらに A と BE 間、BE と C 間の直列接続として考えます。
[別解]　合成抵抗の考え方を用いずに、(3)と同様にI_1とI_3を求めて解くことができます。すなわち、原則 1.2.のキルヒホッフの第一法則、第二法則を用いて、未知数I_1、I_2、I_3、I_4、Iに対して 5 つの連立方程式を立てます。キルヒホッフの第二法則を用いるにあたり、回路が被らないように注意します。

【解説】
(1)　図より、B について
$I = I_1 - I_2 \cdots$(答)
E について
$I = I_4 - I_3 \cdots$(答)

(2)　$x=0$のとき、回路はRと$3R$の並列回路より$I_1 = 0$、$I_2 = \frac{V}{3R}$であるから

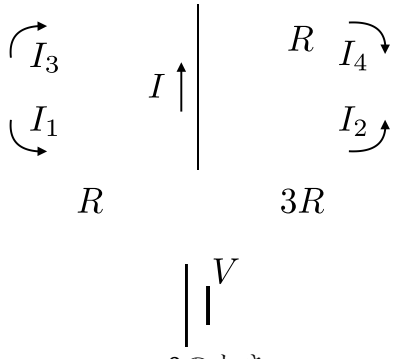
$$I = I_1 - I_2 = -\frac{V}{3R} \cdots (\text{答})$$

$$P = V\left(\frac{V}{R} + \frac{V}{3R}\right) = \frac{4V^2}{3R} \cdots (\text{答})$$

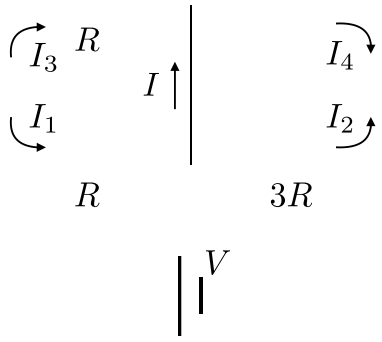
$x=1$のとき、$I_1 = \frac{V}{R}$、$I_2 = 0$であるから

$$I = I_1 - I_2 = \frac{V}{R} \cdots (\text{答})$$

$$P = V\left(\frac{V}{R} + \frac{V}{R}\right) = \frac{2V^2}{R} \cdots (\text{答})$$



$x = 0$のとき



$x = 1$のとき

(3)　$I = 0$のとき、(1)より

$I_1 = I_2$

$I_3 = I_4$

また、AE と AB の電圧降下、EC と BC の電圧降下は等しいので

$xRI_3 = RI_1$

$(1 - x)RI_4 = 3RI_2$

電池→A→B→C→電池の閉回路において、キルヒホッフの第二法則より

$V = RI_1 + 3RI_2$

以上 5 式より

$I_1 = \frac{V}{4R}$、$I_3 = \frac{V}{R}$、$x = 0.25$

また

$$P = V(I_1 + I_3) = \frac{5V^2}{4R} \cdots (\text{答})$$

[別解]

ホイートストーンブリッジとして考えて

$xR \cdot 3R = R \cdot (1 - x)R$

$\therefore x = 0.25$

以下同様にして解くことができます。

(4)　A と BE 間の合成抵抗R_1は

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R}+\frac{1}{xR}$$

$$\therefore R_1=\frac{x}{1+x}R$$

BE と C 間の合成抵抗R_2は

$$\frac{1}{R_2}=\frac{1}{3R}+\frac{1}{(1-x)R}$$

$$\therefore R_2=\frac{3(1-x)}{4-x}R$$

全体の合成抵抗R_3は

$$R_3=\frac{x}{1+x}R+\frac{3(1-x)}{4-x}R=\frac{3+4x-4x^2}{(1+x)(4-x)}R$$

よって、Pの一般式は

$$P=\frac{V^2}{R_3}=\frac{(1+x)(4-x)}{3+4x-4x^2}\cdot\frac{V^2}{R}\cdots(\text{答})$$

[別解]

キルヒホッフの第一法則を用いて(1)の結果より

$I_2=I_1-I$

$I_4=I_3+I$

キルヒホッフの第二法則より

電池→A→B→C→電池の閉回路について

$V=I_1R+I_2\cdot 3R$

電池→A→E→C→電池の閉回路について

$V=I_3\cdot xR+I_4\cdot(1-x)R$

A→B→E→A の閉回路について

$0=I_1R-I_3\cdot xR$

以上 5 式より

$$I_1=\frac{x(4-x)V}{(3+4x-4x^2)R}$$

$$I_3=\frac{(4-x)V}{(3+4x-4x^2)R}$$

したがって

$$P = V(I_1 + I_3)$$

$$= V \cdot \left\{ \frac{x(4-x)V}{(3+4x-4x^2)R} + \frac{(4-x)V}{(3+4x-4x^2)R} \right\}$$

$$= \frac{(1+x)(4-x)}{3+4x-4x^2} \cdot \frac{V^2}{R} \cdots (\text{答})$$