Q.（基礎問題精講数学 3 P90 例題 51(1)）
別解で、両辺に$(n+1)$をかけてできた式がどうして公比 1 の等比数列であると言えるのかが理解できません。

A.

$$(n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+1)na_n \qquad —(*)$$

漸化式に慣れていれば、この式を見た時点で等比数列が隠れていると気付きます。

気づかない場合は、置き換えを利用します。
($(*)$式の右辺)=$(n+1)na_n$をb_nとおきます。

$$b_n = (n+1)na_n$$

このb_nを使って左辺を書き換えましょう。
b_nのnをすべて$n+1$に書き換えると、左辺と同じになります。

$$b_n = (n+1)na_n$$
$$\downarrow$$
$$b_{n+1} = (n+1+1)(n+1)a_{n+1}$$
$$\updownarrow$$
$$b_{n+1} = (n+2)(n+1)a_{n+1} \quad \leftarrow (*)\text{式の左辺と同じ}$$

これより、($(*)$式の左辺)=b_{n+1}と表すことができます。
したがって、漸化式は

$$(n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+1)na_n$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{b_{n+1} = b_n}$$

となります。
この式は、数列$\{b_n\}$が**ある項を 1 倍すると次の項になることを表しています。**
従って数列$\{b_n\}$は公比が 1 の等比数列だということが分かります。

別の見方もできます。$b_{n+1} = b_n$という式は「**ある項とその次の項は同じ**」という意味なので、初項をb_1とすると数列$\{b_n\}$は

$$b_1, b_1, b_1, b_1, \ldots$$

と**全ての項が同じ数の列**となります。これを等比数列とみなすと、公比が 1 となるわけです。

※補足ですが、$\{b_n\}$は等差数列とみなすこともできます。その場合、公差は０となります。

これより、$b_n = b_1$が成り立ちます。これをa_nを用いて書き換えます。もともと
$b_n = (n+1)na_n$と置き換えていました。
また$n = 1$のとき、$b_1 = 2 \times 1 \times a_1 = 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$
このb_nとb_1を代入すると、

$$b_n = b_1$$
$$\Leftrightarrow (n+1)na_n = 1$$

これより

$$a_n = \frac{1}{(n+1)n}$$

注意して欲しいのは、$\{a_n\}$自体が等比数列なのではなく、**置き換えをした後の$\{\boldsymbol{b_n}\}$が等差数列**だということです。等差数列であるb_nの一般項は容易に求められますから、**$\boldsymbol{b_n}$を介して間接的に$\boldsymbol{a_n}$を求めようという方針です。**
この問題のように何かをかけると等比数列を作れるときがあり、これに気づけば素早く解くことが出来ます。