聖マ 2015　数学

配点　　合計 100 点

1〔1〕 6 点　〔2〕 6 点　〔3〕6 点　〔4〕7 点　　計 25 点
2〔1〕 6 点　〔2〕 6 点　〔3〕6 点　〔4〕7 点　　計 25 点
3〔1〕 8 点　〔2〕 8 点　〔3〕9 点　　計 25 点
4〔1〕10 点　〔2〕15 点　　計 25 点

聖マリアンナ医科大学入試問題

2015 年数学

解答・解説編

①小問集合

〔1〕対数、三角比の計算

○原則

1． ◆対数の性質

$a>0, a\neq 1$のとき、

$\log_a a^b = b$

2． ◆底の変換公式

$a,b,c>0, a\neq 1, c\neq 1$のとき、

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

3． ◆有名角の三角比

$\dfrac{\pi}{2}$以下の有名角とその三角比は以下の表の通り。

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	×

4． ◆3 倍角の公式

Ⅰ)$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

Ⅱ)$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

○解答・解説

【方針】

与式に対数部分と三角比部分があります。対数の計算は、底が揃っていることを確認する必要が

あります。今回は底が揃っていないので、底を揃えて計算することを考えます。このとき、底の変換公式（**原則２**）を用います。三角比の部分は$\frac{\pi}{18}$が有名角（**原則３**参照）ではないため、これ以上計算ができませんが、cos の 3 乗と 1 乗の部分があるので 3 倍角の公式（**原則４**）の逆を用いれば$\frac{\pi}{6}$で表すことができないか、と頭に入れておくとよいでしょう（なお解説では 3 倍角の公式を利用することを前提として便宜上、$\cos\frac{\pi}{18}=a$と置き換えていますが、必ずしも置き換える必要はありません)。

【解説】

与式を見やすくするため、$\cos\dfrac{\pi}{18}=a$とおきます。

$$\left(与式\right)=8(1+a^3)\log_A e-\frac{3}{2}(1+a)\log_e A$$

まず対数部分の値を求めます。

$\log_e A=\log_e e^2=2$　　（←**原則１**）

また底の変換公式（**原則２**）より、

$\log_A e=\dfrac{\log_e e}{\log_e A}=\dfrac{\log_e e}{\log_e e^2}=\dfrac{1}{2}$となります。

これらを与式に代入して、aの降べきの順に整理します。

$$\begin{aligned}\left(与式\right)&=8(1+a^3)\times\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(1+a)\times 2\\&=4(1+a^3)-3(1+a)\\&=4a^3-3a+1\end{aligned}$$

次に三角比の計算です。3 倍角の公式（**原則４**）より、

$$\cos(3\times\frac{\pi}{18})=4\cos^3\frac{\pi}{18}-3\cos\frac{\pi}{18}=4a^3-3a$$

従って、

$$\begin{aligned}\left(与式\right)&=\cos(3\times\frac{\pi}{18})+1\\&=\cos\frac{\pi}{6}+1\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}+1\end{aligned}$$

（← **原則３**）

〔2〕方程式

○原則

1．　◆$\frac{f(x)}{g(x)}$の微分

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

○解答・解説

【方針】

　方程式の両辺に変数がある場合、変数を左辺にまとめるのが鉄則です。変数を左辺のみにするために両辺を$x(>0)$で割ります。左辺を$f(x)$として増減を調べ、$y = f(x)$と$y = b$のグラフを描きます。「異なる 2 つの実数解をもつ」という部分から、2 つのグラフが 2 つの交点を持つようなbの範囲を求めればよいことが分かります。

【解説】

まず、方程式を変形して変数を左辺のみにします。

$\log_e x = bx$—$(*)$

$x > 0$ なので、$(*)$の両辺をxで割ると、

$$\frac{\log_e x}{x} = b$$

左辺を$f(x)$とすると、$(*)$が異なる 2 つの実数解を持つのは、

曲線$y = \dfrac{\log_e x}{x}$と直線$y = b$が 2 つの交点を持つときです。

次に$f(x) = \dfrac{\log_e x}{x}$の増減を調べます。$f(x)$の導関数を$f'(x)$とすると、

$$f'(x) = \frac{(\log_e x)'x - (\log_e x) \times (x)'}{x^2} \qquad (\leftarrow \textbf{原則 1})$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \times x - (\log_e x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \log_e x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ とすると、

$$\frac{1 - \log_e x}{x^2} = 0$$

$\Leftrightarrow 1 - \log_e x = 0 \ (\because x > 0)$

$\Leftrightarrow \log_e x = 1$

$\Leftrightarrow x = e$

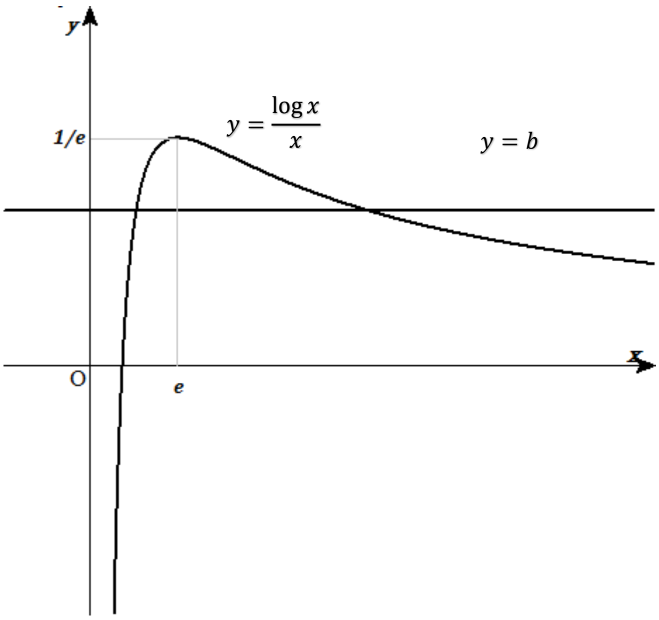
x	0	…	e	…
$f'(x)$	×	+	0	−
$f(x)$	×	↗	$\frac{1}{e}$	↘

よって関数$f(x)$の増減は右上のようになります。

またグラフを描くためには、両端の極限値も調べておく必要があります。

$\lim_{x \to +0} f(x) = -\infty, \lim_{x \to \infty} = 0$

以上より、曲線$y = f(x)$と直線$y = b$のグラフの概形は以下ようになります。



$\therefore$ 求めるbの値の範囲は　$0 < b < \frac{1}{e}$

（別解）

方程式$(*)$の右辺を左辺に移項して

$\log_e x - bx = 0 \qquad (x > 0)$

と変形し、$f(x) = \log_e x - bx$として$y = f(x)$のグラフを描き、

$y = 0\left(x軸\right)$と 2 点で交わるようなbの範囲を求めても解けます。このとき、

$f'(x) = \frac{1}{x} - b \qquad (x > 0)$

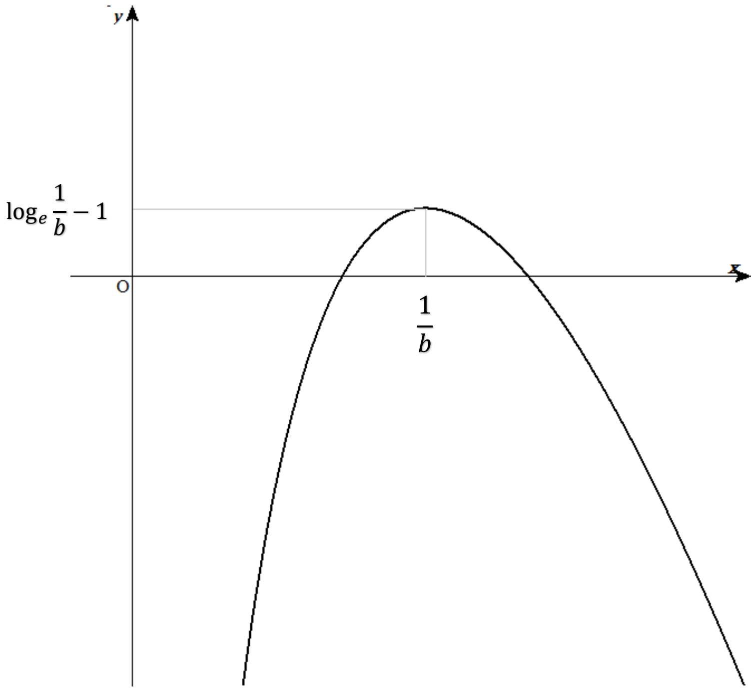
$f'(x) = 0$ とすると、$x = \dfrac{1}{b}$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{b}$	$\cdots$
$f'(x)$	×	$+$	0	$-$
$f(x)$	×	↗	$\log_e \frac{1}{b} - 1$	↘

よって$f(x)$の増減は右のようになります。

また　$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$，$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

以上より、曲線$y = f(x)$のグラフの概形は以下ようになります。



∴ 求めるbの値の範囲は　$0 < b < \dfrac{1}{e}$

〔3〕数列

○原則

1．　◆等差数列の和の公式

初項a_1,公差dの等差数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの総和をS_nとすると、

$$S_n = \frac{1}{2} n\{2a_1 + (n-1)d\}$$

2．　◆対数関数の性質

$a, b > 0, a \neq 1$のとき、

$$a^{\log_a b} = b$$

３．　◆累乗の和の公式

Ⅰ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

Ⅱ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Ⅲ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

○解答・解説

【方針】

$\{c_n\}$は等差数列なので、S_nは等差数列の和の公式（**原則１**）で求められます。T_nを求める前にU_nをS_nで表してみると、対数関数の性質（**原則２**）から$U_n = S_n$であることが分かります。$\{U_n\}$の和を求めるときには累乗の和の公式（**原則３（Ⅱ）**）で求めます。

【解説】

まず、S_nを求めます。

数列$\{c_n\}$は初項 1, 公差 2 の等差数列なので、等差数列の和の公式（**原則１**）より、

$$S_n = \frac{1}{2} \times n\{2 \times 1 + (n-1) \times 2\}$$

$$= \frac{n}{2}\{2 + 2(n-1)\}$$

$$= \frac{n}{2}(2n)$$

$$= n^2 \qquad \text{—①}$$

次に$U_n = S_n$であることを示します。

$T_n = \log_e S_n$, $U_n = e^{T_n}$なので、

$U_n = e^{\log_e S_n} = S_n$　　（←**原則２**）

よって①から、$U_n = n^2$

ゆえに数列$\{U_n\}$の初項から第24項までの和は、

$$\sum_{k=1}^{24} U_k = \sum_{k=1}^{24} k^2 = \frac{1}{6} \times 24(24+1)(2\times 24+1) \qquad （\leftarrow \textbf{原則 3（II）}）$$

$$= \frac{1}{6} \times 24 \times 25 \times 49 = 4900$$

〔4〕定積分

○原則

１．　◆$\frac{f'(x)}{f(x)}$の積分

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log_e |f(x)| + C \qquad (C: \text{積分定数})$$

２．　◆対数の性質

$a, b, c > 0\,, a \neq 1$ のとき、

$\log_a b^c = c \log_a b$

○解答・解説

【方針】

分子が分母を微分した形になっていることに気付けば、

$\frac{f'(x)}{f(x)}$の積分（**原則 1**）を行えばよいことが分かります。

【解説】

$\frac{2e^x}{2e^x+3} = \frac{(2e^x+3)'}{2e^x+3}$ となっているので、

$$\int_0^D \frac{2e^x}{2e^x+3} dx = [\log_e |2e^x+3|]_0^D \qquad （\leftarrow \textbf{原則 1}）$$

$$= \log_e |2e^{\log_e 3} + 3| - \log_e |2e^0 + 3|$$

$$= \log_e 9 - \log_e 5$$
$$= \log_e 3^2 - \log_e 5$$
$$= 2\log_e 3 - \log_e 5$$ （← **原則２**）

（別解）

$\left(分母\right) = t$として変数変換を行っても解けます。積分範囲に注意しましょう。

$2e^x + 3 = t$ ―① とすると、

$2e^x dx = dt$

$x: 0 \to \log_e 3$ のとき、$t: 5 \to 9$ （∵①）

よって、

$$\int_0^D \frac{2e^x}{2e^x+3}dx = \int_0^D \frac{1}{2e^x+3}(2e^x dx) = \int_5^9 \frac{1}{t}dt$$
$$= [\log_e|t|]_5^9 = \log_e 9 - \log_e 5$$
$$= 2\log_e 3 - \log_e 5$$ （← **原則２**）

②ベクトル、漸化式、極限

○原則

１．◆ベクトルの単位ベクトル化

あるベクトル$\vec{a} = (x, y)$の単位ベクトル（大きさが１のベクトル）を$\vec{e}$とすると、

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

また、これを成分で表すと

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

２．◆等比数列の漸化式

kを 0 でない実数とします。漸化式$a_{n+1} = ka_n \quad (n = 1,2,\ldots)$があるとき、

数列$\{a_n\}$の一般項を求めるとします。そのためには、漸化式からa_nの添え字の数を小さくし、

a_nを初項a_1を用いて表す必要があります。漸化式より、

$$\begin{aligned} a_{n+1} = ka_n &= k(ka_{n-1}) \qquad (\because a_n = ka_{n-1}) \\ &= k^2 a_{n-1} \\ &= k^2(ka_{n-2}) \qquad (\because a_{n-1} = ka_{n-2}) \\ &= k^3 a_{n-2} \end{aligned}$$

ここで、赤い部分とkの累乗の数の変化に注目すると、赤い部分が 1 減ると、kの累乗は 1 増えることが分かります。したがってこの漸化式の場合、

$\left(\text{赤い部分}\right) + \left(k\text{の累乗}\right) = n + 1$ となります。

この関係から赤い部分が 1（つまりa_1）のとき、kの累乗はnとなりますので、

$a_{n+1} = k^n a_1$

$n + 1 \to n$に置き換えることで、a_nの一般項が得られ、

$a_n = k^{n-1} a_1$　となります。

3．◆Σの計算と極限

$0 < |r| < 1$のとき、

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r(1-r^n)}{1-r}$$ なので、

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r(1-0)}{1-r} = \frac{r}{1-r}$$

○方針・解説

【方針】

数列や点列（ベクトル）の一般項の問題は、

① 条件に従って初めに数回試行する

② 数回の試行から法則を見つけ出し、一般項を求める

③ 一般項から極限を求める

という流れになっていることが多いです。本問もこの流れに沿って小問が設けられているので、上の順番でベクトルの一般項、極限点を考えていきます。

〔1〕与えられた条件の意味を図形的に理解し、実際に$\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, \overrightarrow{P_3P_4}$を描いてみます。
〔2〕〔3〕　〔1〕の試行から、ベクトルの大きさが 1/3 倍ずつになり、向きが縦、斜め、縦、斜めと繰り返しになることが分かります。そこでベクトルが縦の場合、つまり$\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}$（→〔2〕）と斜めの場合、つまり$\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}$（→〔3〕）で場合分けする必要があると考えます。それぞれ、2 つ先のベクトル（〔2〕では$\overrightarrow{P_{2(k+1)-1}P_{2(k+1)}}$、〔3〕では$\overrightarrow{P_{2(k+1)}P_{2(k+1)+1}}$）との関係式を立て、**原則 2** の考え方を用いて一般項を求めます。
〔4〕ベクトルの大きさが 1/3 倍ずつと小さくなることから、$P_n(x_n, y_n)$はある点(X, Y)に収束することが予測できます。$P_n = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \cdots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$なので〔2〕〔3〕で求めたベクトルの和を求め、その極限をとればよいことが分かります。極限値を求めるときに**原則 3** を用います。

【解説】
〔1〕まず、$\overrightarrow{P_2P_3}$を求めます。条件(Ⅰ)から、

$$\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right| = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|$$

ここで$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (1,2) - (1,1) = (0,1)$となり、$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ だから、

$$\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right| = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

また、条件(Ⅱ)より$\angle P_3P_2P_1 = \dfrac{\pi}{4}$なので$P_3$の候補は 2 つあります。

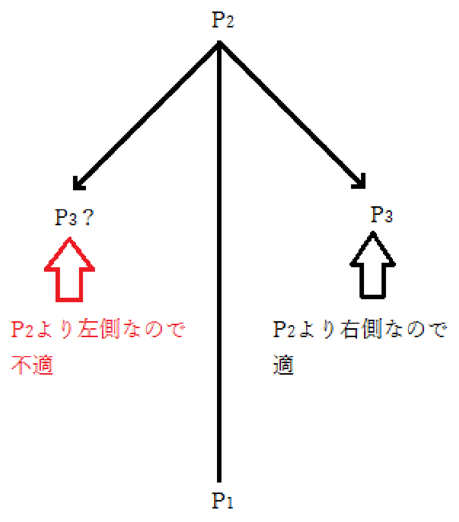
条件(Ⅲ)より、$x_3 \geqq x_2$　つまりP_3はP_2より右側になければいけません。

したがってP_3は右の図の位置になり、$\overrightarrow{P_2P_3}$の方向ベクトルを$\vec{l}$とすると、

$\vec{l} = (1, -1)$

以上より、$\overrightarrow{P_2P_3} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$　　（← **原則 1**）

$$= \frac{1}{3} \times \frac{(1,-1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,-1)$$



同じようにして、次は$\overrightarrow{P_3P_4}$を求めます。条件(Ⅰ)より、

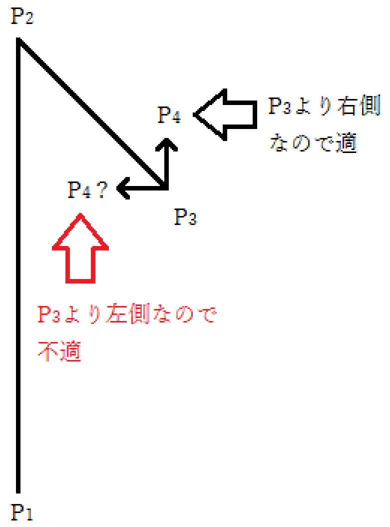
$$\left|\overrightarrow{P_3P_4}\right| = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right| = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

また、条件(Ⅱ)より$\angle P_4P_3P_2=\dfrac{\pi}{4}$なので$P_4$の候補は 2 つあります。

条件(Ⅲ)より、$x_4 \geqq x_3$　つまりP_4はP_3より右側になければいけません。

したがってP_4は右の図の位置になり、$\overrightarrow{P_3P_4}$の方向ベクトルを$\vec{m}$とすると、

$\vec{m}=(0,1)$



以上より、$\overrightarrow{P_3P_4}=\dfrac{1}{9}\times\dfrac{\vec{m}}{|\vec{m}|}$　　（← **原則 1**）

$$=\frac{1}{9}\times\frac{(0,1)}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{1}{9}(0,1)=\left(0,\frac{1}{9}\right)$$

〔2〕　縦向きのベクトルについて一般項を求めます。そのため、
$\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}$とその 2 つ先の$\overrightarrow{P_{2(k+1)-1}P_{2(k+1)}}$との関係式を立てます。
条件(Ⅰ)より、

$$\left|\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}\right|=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{P_{2k+1}P_{2k+2}}\right|=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}\right|$$

よって、$\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}$と$\overrightarrow{P_{2(k+1)-1}P_{2(k+1)}}$の関係式が得られます。

$$\left|\overrightarrow{P_{2k+1}P_{2k+2}}\right|=\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{P_{2(k+1)-1}P_{2(k+1)}}\right|=\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}\right|$$

また〔1〕の試行より、$\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}\ (k=1,2,\dots,n)$は全て同じ向きなので、

$$\overrightarrow{P_{2(k+1)-1}P_{2(k+1)}}=\frac{1}{9}\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\overrightarrow{P_{2(k-1)-1}P_{2(k-1)}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{9}\right)^2\overrightarrow{P_{2(k-1)-1}P_{2(k-1)}}$$ ※赤い部分が 1 減ると、$\left(\frac{1}{9}\right)$の累乗が 1 増えます。

$$\dots=\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\overrightarrow{P_3P_4}$$　　（← **原則 2**）

$$= \left(\frac{1}{9}\right)^k \overrightarrow{P_1P_2} = \left(\frac{1}{9}\right)^k (0,1) = \left(0, \left(\frac{1}{9}\right)^k\right)$$

したがって、$k+1 \to k$に置き換えると

$$\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}} = \left(0, \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\right)$$

〔3〕　斜め向きのベクトルについて一般項を求めます。〔2〕と同様にして
$\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}$とその 2 つ先の$\overrightarrow{P_{2(k+1)}P_{2(k+1)+1}}$との関係式を立てます。条件(Ⅰ)より、

$$\left|\overrightarrow{P_{2k+1}P_{2k+2}}\right| = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{P_{2k+2}P_{2k+3}}\right| = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{P_{2k+1}P_{2k+2}}\right|$$

よって、$\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}$と$\overrightarrow{P_{2(k+1)}P_{2(k+1)+1}}$の関係式が得られます。

$$\left|\overrightarrow{P_{2k+2}P_{2k+3}}\right| = \frac{1}{9}\left|\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{P_{2(k+1)}P_{2(k+1)+1}}\right| = \frac{1}{9}\left|\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}\right|$$

また〔1〕の試行より、$\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}$ $(k = 1,2,\dots,n)$は全て同じ向きなので、

$$\overrightarrow{P_{2(k+1)}P_{2(k+1)+1}} = \frac{1}{9}\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\overrightarrow{P_{2(k-1)}P_{2(k-1)+1}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{9}\right)^2 \overrightarrow{P_{2(k-1)}P_{2(k-1)+1}}$$ ※赤い部分が 1 減ると、$\left(\frac{1}{9}\right)$の累乗が 1 増えます。

$$\dots = \left(\frac{1}{9}\right)^k \overrightarrow{P_2P_3}$$ （← **原則 2**）

$$= \left(\frac{1}{9}\right)^k \times \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,-1) = \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\left(\frac{1}{9}\right)^k, -\frac{\sqrt{2}}{6}\left(\frac{1}{9}\right)^k\right)$$

したがって、$k+1 \to k$に置き換えると

$$\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}, -\frac{\sqrt{2}}{6}\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\right)$$

〔4〕 〔2〕〔3〕の結果を用いてP_nの収束点を求めます。

$$(X,Y)=\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{OP_n}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3}+\cdots+\overrightarrow{P_nP_{n+1}}+\cdots$$

$$=\overrightarrow{OP_1}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$$

ここで、nが十分大きければnの偶奇に関わらずP_nは同じ点に収束するので、nの偶奇で場合分けする必要は特にありません。したがって、

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{P_kP_{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}+\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}\right)$として構いません。

ゆえに

$$(X,Y)=\overrightarrow{OP_1}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}+\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}\right)$$

第2項の成分を求めます。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}+\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(0,\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1},-\frac{\sqrt{2}}{6}\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1},\left(1-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\right)$$

$\dfrac{1}{9}$の累乗をkにして**原則3**を使える形にするため、$\dfrac{9}{9}$をかけて変形します。

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^{k},\left(9-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^{k}\right)$$

$$=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{9}\right)^{k},\left(9-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{9}\right)^{k}\right)$$

$$=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}},\left(9-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}\right)$$ （← **原則3**）

$$=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{8},\left(9-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{1}{8}\right)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{16},\frac{9}{8}-\frac{3\sqrt{2}}{16}\right)$$

以上より、

$$(X,Y)=\overrightarrow{OP_1}+\left(\frac{3\sqrt{2}}{16},\frac{9}{8}-\frac{3\sqrt{2}}{16}\right)$$

$$=(1,1)+\left(\frac{3\sqrt{2}}{16},\frac{9}{8}-\frac{3\sqrt{2}}{16}\right)=\left(1+\frac{3\sqrt{2}}{16},\frac{17}{8}-\frac{3\sqrt{2}}{16}\right)$$

③図形、無限等比級数、三角方程式

○原則

1. ◆等比数列の漸化式（大問②の**原則 2** と同じ）

   kを 0 でない実数とします。漸化式$a_{n+1} = ka_n \quad (n = 1,2,\ldots)$があるとき、

   数列$\{a_n\}$の一般項を求めるとします。そのためには、漸化式からa_nの添え字の数を小さくし、

   a_nを初項a_1を用いて表す必要があります。漸化式より、

   $$\begin{aligned} a_{n+1} &= ka_n = k(ka_{n-1}) \qquad (\because a_n = ka_{n-1}) \\ &= k^2 a_{n-1} \\ &= k^2(ka_{n-2}) \qquad (\because a_{n-1} = ka_{n-2}) \\ &= k^3 a_{n-2} \end{aligned}$$

   ここで、赤い部分とkの累乗の数の変化に注目すると、赤い部分が 1 減ると、kの累乗は 1 増えることが分かります。したがってこの漸化式の場合、

   $\left(\text{赤い部分}\right) + \left(k\text{の累乗}\right) = n + 1$ となります。

   この関係から赤い部分が 1（つまりa_1）のとき、kの累乗はnとなりますので、

   $a_{n+1} = k^n a_1$

   $n + 1 \to n$に置き換えることで、a_nの一般項が得られ、

   $a_n = k^{n-1}a_1$　となります。

2. ◆Σの計算と極限（大問②の**原則 3** と同じ）

   $0 < |r| < 1$のとき、

   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r(1-r^n)}{1-r}$ なので、

   $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r(1-0)}{1-r} = \frac{r}{1-r}$$

3. ◆三角比の関係式

   Ⅰ) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Ⅱ) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Ⅲ) $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

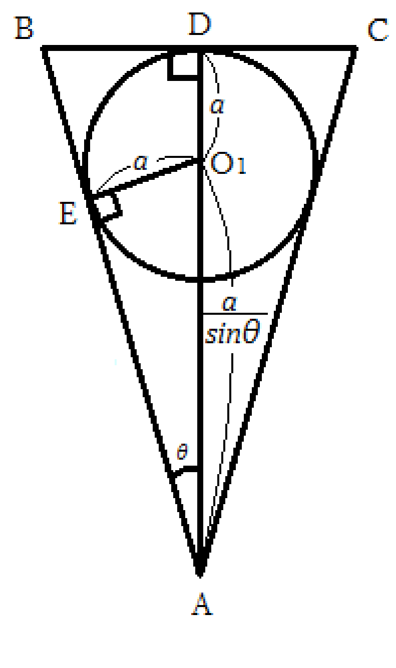
○方針・解説

【方針】

〔1〕三角形の周の長さ(L)を円の半径(a)と三角形の内角(2θ)で表しなさい、

とあるので$\triangle ABC$とその内接円(O_1)の関係に着目します。
三角比を利用すること、また$\angle BAC = 2\theta$とおかれていることを念頭に置いて$\angle BAC$の角二等分線を引き、直角三角形を作ります。できた直角三角形について三角比を考慮し、$\triangle ABC$の各辺の長さをaとθで表します。
〔2〕W_nの一般項を求めるためにO_nとO_{n+1}の半径の関係を調べます。2 つの円が接する部分の直角三角形に着目すると、O_nとO_{n+1}の半径には一定の比があることが分かります。
〔3〕　〔1〕〔2〕で求めた値を用いて三角比の値を求めます。

【解説】



〔1〕$\angle BAC$の角二等分線を引き、BCとの交点をDとします。
対称性より$\triangle ABD$の各辺の長さが分かれば$\triangle ACD$の各辺の長さも分かります。ここでは$\triangle ABD$の各辺の長さを求めます（$\triangle ACD$の各辺の長さを求めても全く同じように解けます)。
O_1Dは円O_1の半径に等しいので、　$O_1D = a$

O_1Aを求めるためにO_1からABに向かって垂線を下ろし、垂線の足をEとして直角三角形AO_1Eを作ります。

$\triangle AO_1E$について、三角比より　$\sin\theta = \dfrac{O_1E}{O_1A} \Leftrightarrow O_1A = \dfrac{O_1E}{\sin\theta}$

$$= \frac{a}{\sin\theta}$$

したがって　$AD = O_1A + O_1D = \dfrac{a}{\sin\theta} + a = a\left(\dfrac{1}{\sin\theta} + 1\right)$

三角比の関係から　$BD = AD\tan\theta = a\left(\frac{1}{\sin\theta}+1\right)\tan\theta$

同様に、　$AB = AD \times \frac{1}{\cos\theta} = a\left(\frac{1}{\sin\theta}+1\right)\times\frac{1}{\cos\theta}$

$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$なので、$CD = BD, AC = AB$

以上より、

$L = AB + BC + CA$

$= 2(AB + BD)$

$= 2\left\{a\left(\frac{1}{sin\,\theta}+1\right)\times\frac{1}{cos\,\theta} + a\left(\frac{1}{sin\,\theta}+1\right)tan\,\theta\right\}$

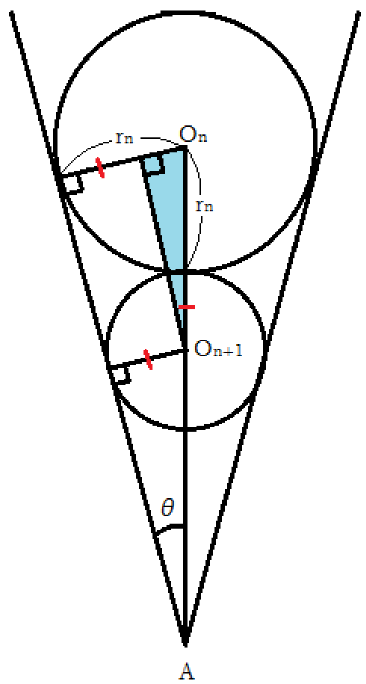
$= 2a\left(\frac{1}{sin\,\theta}+1\right)\left(\frac{1}{cos\,\theta}+tan\,\theta\right)$

$= 2a\left(\frac{1}{sin\,\theta}+1\right)\times\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$= 2a \times \frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}\times\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2a(1+\sin\theta)^2}{\sin\theta\cos\theta}$

〔2〕まず円の半径の一般式を求めます。そのために円O_nとO_{n+1}の半径の関係を求めます。それぞれの円の中心と接点を結ぶ直線に着目します。円$O_k(k = 0,1,2,\dots,n)$の半径をr_kとすると、

図の青い直角三角形の部分から、



$$\sin\theta = \frac{r_n - r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}}$$

$\Leftrightarrow (r_n + r_{n+1})\sin\theta = r_n - r_{n+1}$

$\Leftrightarrow (1+\sin\theta)r_{n+1} = (1-\sin\theta)r_n$

$\Leftrightarrow r_{n+1} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r_n$

これでr_{n+1}とr_nの関係が得られたので、r_nを求めます。**原則 1** の考え方を適用します。

$$r_n = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r_{n-1} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r_{n-2}\right) \qquad \left(\because r_{n-1} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r_{n-2}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2 r_{n-2}$$ ※赤い部分が1減ると$\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$の累乗が1増えます。

$$\ldots = \left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{n-1} r_1$$ （← **原則1**）

$$= a\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{n-1}$$

円の周の長さの和を求めます。$W_n = 2\pi r_n$だから、

$$W_n = 2\pi a\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{n-1}$$

極限値を求めるときに**原則2**を適用させるため、

$\left|\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right| < 1$であることを示します。

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$なので、$0 < \sin\theta < 1$

よって、$0 < 1-\sin\theta < 1+\sin\theta \Leftrightarrow 0 < \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} < 1$

Wを求めます。

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi a\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{n-1} = 2\pi a\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{n}$$

$$= 2\pi a\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{-1} \times \frac{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}{1-\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$$ （← **原則2**）

$$= 2\pi a\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{-1} \times \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta-(1-\sin\theta)} = \left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{-1} \times \frac{1-\sin\theta}{\sin\theta}\pi a$$

$$= \frac{\pi a(1+\sin\theta)}{\sin\theta}$$

〔4〕　〔2〕〔3〕より、

$L = \frac{2a(1+\sin\theta)^2}{\sin\theta\cos\theta}, W = \frac{\pi a(1+\sin\theta)}{\sin\theta}$なので$L = W$のとき、

$$\frac{2a(1+\sin\theta)^2}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\pi a(1+\sin\theta)}{\sin\theta}$$

$a \neq 0, 1+\sin\theta \neq 0$なので、両辺を$a(1+\sin\theta)$で割ります。

$$\frac{2(1+\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\pi}{\sin\theta}$$

両辺に$\sin\theta$をかけます。

$$\frac{2(1+\sin\theta)}{\cos\theta}=\pi$$

$$\Leftrightarrow 1+\sin\theta=\frac{\pi}{2}\cos\theta \ \Leftrightarrow \sin\theta=\frac{\pi}{2}\cos\theta-1 \quad —(*)$$

これで$\sin\theta$と$\cos\theta$の関係式が 1 つ得られました。しかし$\sin\theta,\cos\theta$を求めるには$\sin\theta$と$\cos\theta$の関係式がもう 1 つ必要です。そこで三角比の関係式$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$（**原則 3 （Ⅰ）**）を持ち出します。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$に$(*)$を代入します。

$$\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta-1\right)^2+\cos^2\theta=1$$

これを$\cos\theta$についてまとめます。

$$\left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)\cos^2\theta-\pi\cos\theta=0$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$だから $\cos\theta\neq 0$ なので、両辺を $\cos\theta$ で割ります。

$$\left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)\cos\theta-\pi=0$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\pi}{\frac{\pi^2}{4}+1}=\frac{4\pi}{\pi^2+4}$$

これを$(*)$に代入します。

$$\sin\theta=\frac{\pi}{2}\times\frac{4\pi}{\pi^2+4}-1=\frac{2\pi^2}{\pi^2+4}-1=\frac{\pi^2-4}{\pi^2+4}$$

④定積分、接線、求積

○原則

1．　◆部分積分

$$\int f'(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx$$

2．　◆接線の方程式

曲線$y=f(x)$の、$\big(t,f(t)\big)$における接線の式は

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

３.　◆2 線で囲まれた部分の面積

$a \leqq x \leqq b$において$f(x) \geqq g(x)$とします。

$a \leqq x \leqq b$において、$y=f(x), y=g(x)$ で囲まれた部分の面積を$S(x)$とすると、

$$S(x)=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

○方針・解説

【方針】

〔1〕$x^a \times e^{kx}\Big(a:\text{自然数}, k:\text{実数}\Big)$

の積分は、部分積分（**原則１**）によって積分値を求めることが出来ます。

〔2〕①～④ 曲線 C の「極大値」や「接線」に関する問題なので、$f(x)$を微分します。
⑤ 囲まれた部分の面積を求める問題なので、積分を行います。そのとき、積分が難しい複雑な式になりますが〔1〕で求めた積分値を利用することを考えます。

【解説】
〔1〕部分積分（**原則１**）を行います。

(1)　$f'(t)=e^{-t}, g(t)=t$とすると、$f(t)=-e^{-t}$だから、

$$\int_0^a te^{-t}\,dt=\int_0^a t(-e^{-t})'\,dt=[t(-e^{-t})]_0^a-\int_0^a 1\times(-e^{-t})\,dt \qquad (\leftarrow \textbf{原則１})$$

$$=a(-e^{-a})-\int_0^a(-e^{-t})\,dt$$

$$=-ae^{-a}-[e^{-t}]_0^a$$

$$=-ae^{-a}-(e^{-a}-e^0)$$

$$=-ae^{-a}-e^{-a}+e^0$$

$= -(a+1)e^{-a}+1$

(2)　$f'(t)=e^{-t}, g(t)=t^2$とすると、$f(t)=-e^{-t}$だから、

$$\int_0^a t^2e^{-t}\,dt = \int_0^a t^2(-e^{-t})'\,dt = [t^2(-e^{-t})]_0^a - \int_0^a 2t\times(-e^{-t})\,dt \qquad \text{（← **原則 1**）}$$

$$= [t^2(-e^{-t})]_0^a - \int_0^a 2t\times(-e^{-t})\,dt$$

$$= -a^2e^{-a} + \int_0^a 2te^{-t}\,dt \text{—}(A)$$

(A)の第 2 項を求めるために再び部分積分をします。

新たに$f'(t)=e^{-t}, g(t)=2t$とすると、$f(t)=-e^{-t}$だから、

$$\int_0^a 2te^{-t}\,dt = \int_0^a 2t(-e^{-t})'\,dt = [2t(-e^{-t})]_0^a - \int_0^a 2(-e^{-t})\,dt \qquad \text{（← **原則 1**）}$$

$$= [2t(-e^{-t})]_0^a - [2e^{-t}]_0^a$$
$$= 2a(-e^{-a}) - (2e^{-a}-2e^0)$$
$$= -2ae^{-a} - (2e^{-a}-2)$$
$$= -2ae-^{a} - 2e^{-a} + 2$$

この値を(A)に代入して、

$$(A) = -a^2e^{-a} - 2ae^{-a} - 2e^{-a} + 2$$
$$= -(a^2+2a+2)e^{-a} + 2$$

〔2〕$f(x)$の極大値を求めます。

$f(x) = (\sqrt{x}-1)e^{-\sqrt{x}}$だから、$x>0$ において、

$$f'(x) = (\sqrt{x}-1)'e^{-\sqrt{x}} + (\sqrt{x}-1)(e^{-\sqrt{x}})'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} + (\sqrt{x}-1)\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}$$

$$=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\right)e^{-\sqrt{x}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\right)e^{-\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0$ とすると、

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\right)e^{-\sqrt{x}}=0$$

$e^{-\sqrt{x}}>0$ だから、

$$\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}=0$$

$\Leftrightarrow x=4$

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$

これより、$f(x)$の増減は右上のようになります。

$\therefore$ 曲線Cは$x=4$で極大値$f(4)=\left(\sqrt{4}-1\right)e^{-\sqrt{4}}=\frac{1}{e^2}$をとります。

また、$y=f(x)$の点$(t,f(t))$における接線の方程式は

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$　　（← **原則２**）と書けます。

いま、$f(t)=\left(\sqrt{t}-1\right)e^{-\sqrt{t}}$,　$f'(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{2}\right)e^{-\sqrt{t}}$なので、

$$y=\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{2}\right)e^{-\sqrt{t}}(x-t)+\left(\sqrt{t}-1\right)e^{-\sqrt{t}}$$

この接線が原点を通るときのtを求めます。上の式に$(x,y)=(0,0)$を代入して、

$$0=\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{2}\right)e^{-\sqrt{t}}(0-t)+\left(\sqrt{t}-1\right)e^{-\sqrt{t}}$$

$$\Leftrightarrow 0=-t\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{2}\right)e^{-\sqrt{t}}+\left(\sqrt{t}-1\right)e^{-\sqrt{t}}$$

$e^{-\sqrt{t}}\neq 0$ なので、両辺を$e^{-\sqrt{t}}$で割ります。

$$\Leftrightarrow 0=-t\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{2}\right)+\left(\sqrt{t}-1\right)$$

右辺と左辺を入れ替えます。

$$-t\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{2}\right)+\left(\sqrt{t}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{t}+\frac{t}{2}+\sqrt{t}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{2}-1=0$$

従って、　$t=2$

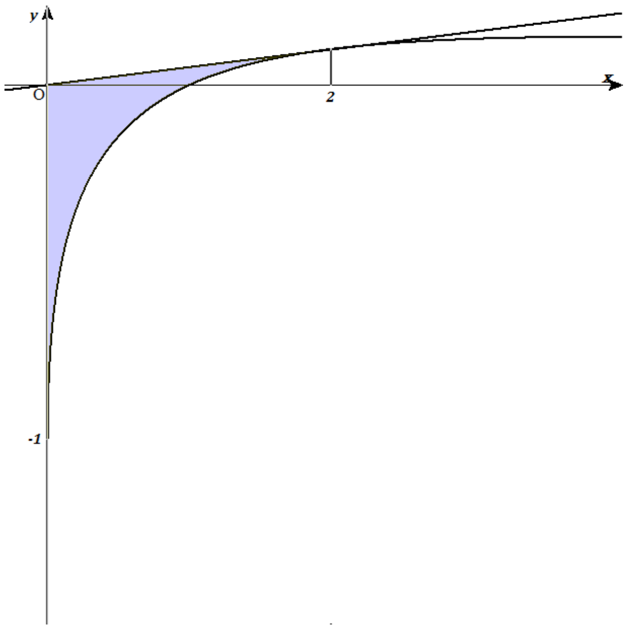
このときの接線をlとすると、lの傾きは$f'(2)$なので、

$$f'(2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)e^{-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{-\sqrt{2}}$$

ここで接線lの式は、傾きが$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$かつ、原点を通るので、

$l\colon y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}e^{-\sqrt{2}}x$となります。

曲線C,接線l,y軸で囲まれた部分は以下の図の塗りつぶし部分になります。



従って求める面積をSとすると、

$$S=\int_0^2\left\{\left(\text{接線}l\right)-\left(\text{曲線}C\right)\right\}dx \qquad （\leftarrow \textbf{原則 3}）$$

$$=\int_0^2\left\{\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{-\sqrt{2}}x-\left(\sqrt{x}-1\right)e^{-\sqrt{x}}\right\}dx$$

$$=\int_0^2\left\{\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{-\sqrt{2}}x-\left(\sqrt{x}-1\right)e^{-\sqrt{x}}\right\}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{-\sqrt{2}}\int_0^2 x\,dx-\int_0^2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

ここで$T=\int_0^2 (\sqrt{x}-1)e^{-\sqrt{x}}\,dx$とします。

〔1〕の結果を利用して Tを求めるために、$\sqrt{x}=t$として変数変換を行います。

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt \Leftrightarrow dx=2\sqrt{x}dt$$

$$\Leftrightarrow dx=2tdt$$

$x{:}\,0\to 2$ のとき、$t{:}\,0\to\sqrt{2}$なので、

$$T=\int_0^{\sqrt{2}}(t-1)e^{-t}\times 2tdt=2\int_0^{\sqrt{2}}(t^2e^{-t}-te^{-t})\,dt$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2}}t^2e^{-t}\,dt-2\int_0^{\sqrt{2}}te^{-t}\,dt$$

〔1〕の結果に$a=\sqrt{2}$を代入した値を利用します。

$$T=2\left\{-\left(\sqrt{2}^2+2\times\sqrt{2}+2\right)e^{-\sqrt{2}}+2\right\}-2\left\{-(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}+1\right\}$$

$$=-4(2+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}+4+2(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}-2$$

$$=-2(\sqrt{2}+3)e^{-\sqrt{2}}+2$$

従って、

$$S=\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{-\sqrt{2}}\int_0^2 x\,dx-T$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{-\sqrt{2}}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2-\left\{-2(\sqrt{2}+3)e^{-\sqrt{2}}+2\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{-\sqrt{2}}\times 2+2(\sqrt{2}+3)e^{-\sqrt{2}}-2$$

$$=(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}}+2(\sqrt{2}+3)e^{-\sqrt{2}}-2$$

$$=(3\sqrt{2}+5)e^{-\sqrt{2}}-2$$