数学2　標準問題精講　p.50~51　例題20(2)(ⅱ)

Q.(2)(ⅱ)の流れがなかなか覚えられませんでした。

A.
与えられた条件から、

$2z + i\bar{z} = kz$ (kは実数)

を立式するところまではできたと思います。この条件を満たすzが、$z^2 + \overline{z^2} = 0$ を満たすことを示したら良いのですが、ここで手が止まってしまったはずです。それは、次の原則が頭に入っていないからだと考えられます。

【原則】
複素数についての関係式は「実数＝複素数」の形にすると、新しい情報が得られる

これが頭に入っていれば話は早い。つまりやることは、

$2z + i\bar{z} = kz$ という式を、実数＝複素数の形に変えるのです。

実数ができるようにするには、全体をzで割れば良いですね（そしてこの時に気づくはずです、z=0, z≠0で場合分けをしないといけないことを。だから解答ではz=0, z≠0で場合分けしているのです）。

ここではz≠0で場合分けしたとして進めます。全体をzで割るんでしたね。

与式

⇔

$2z + i\bar{z} = kz$

⇔　（全体をzで割って）

$2 + \frac{i\bar{z}}{z} = k$

⇔　（左辺に実数、右辺に複素数がくるようにして）

$k - 2 = \frac{i\bar{z}}{z}$

こうして左辺が実数、右辺が複素数となりました。複素数が実数ということは、複素数wに対して、

$w = \bar{w}$

が成り立つということを意味します。つまり、先ほどの式から、

$$\frac{i\bar{z}}{z} = \overline{\left(\frac{i\bar{z}}{z}\right)}$$

という式が導けるのです。

（$k-2=\frac{i\bar{z}}{z}$　という式から　$\frac{i\bar{z}}{z} = \overline{\left(\frac{i\bar{z}}{z}\right)}$　という関係式が導かれるのは、複素数ならではだと思います。だからこそ難しく感じるわけですが、大事なポイントなので頭に入れましょう）

こうして得られた$\frac{i\bar{z}}{z} = \overline{\left(\frac{i\bar{z}}{z}\right)}$という式を変形すると、解答のように、

$$z^2 + \overline{z}^2 = 0$$

が導けるのです。わかりましたでしょうか？

【まとめ】
この問題は「複素数についての関係式は「実数＝複素数」の形にすると、新しい情報が得られる」という原則が頭に入っていれば解ける問題でした。今回のケースのように「複素数の方程式が得られたが、そこから先に進まない・・・」という場合は「実数＝複素数」の形に直してみると、そこから新しい情報が得られることを覚えておきましょう。