

数学ⅡB 標準問題精講 解説

P45 | 演習問題17-2

・不等号の証明は、「コーシー・シュワルツの不等式」が使えないか考えてみる
正直、「コーシー・シュワルツの不等式」を使った問題は多くありません。

しかし、不等号 (\leq) を使った証明では「コーシー・シュワルツの不等式」が使えないかを疑ってみる価値は高いです。

特に、今回のように、「①不等号がある」「②左辺に2乗がある」という場合は、「コーシー・シュワルツの不等式」を使う可能性が高くなることは覚えておくとよいでしょう。

$$(ax+by)^2 \leq \quad \leftarrow \text{「①不等号がある」「②左辺の2乗がある」}$$

さて、今回の「17-2」が難しいのは「①不等号がある」という条件がないからです。わざわざ自分で

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$$

と2乗し、「コーシー・シュワルツの不等式」

$$(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

を適用しなければならないのです。

・途中の式展開がわかりにくかった人へ

標準問題精講の解説中にある(*)の式展開が省略されていますが、丁寧に書くと次のようになっています
(赤字部分が、省略されたところを補った式です)。

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x} + \sqrt{y} \right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2x} + 1 \cdot \sqrt{y} \right)^2 \leq \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1^2 \right\} (\sqrt{2x^2} + \sqrt{y^2}) = \frac{3}{2}(2x+y)$$

無理矢理「コーシー・シュワルツの不等式」を適用していますが、これくらいはできるようにしておきましょう。