Q.(標準問題精講数学 2B P116 例題 52)
解説の補助をお願いします。

A. 軌跡はある点の動きを追うということです。**まずは動きを追いたい点の座標を、パラメータを使って表します。**そうして **x 座標と y 座標の連立でパラメータを消去する**ことである点の動きを 1 つの方程式で表すことができます。得られた**方程式の形から何の図形かを判断します。**
また「軌跡はどのような図形か」と聞かれた場合、高校の範囲では直線、放物線、円、楕円以外はないと思ってよいので、これらのうち**どれかの方程式の形に近づけていく**ことを意識しましょう。あるいは問題を解く前に自分で図を描き実験をしてみて、「こういう図形になるのでは？」と**大まかな予想を立て**て行うとよりスムーズに解けます。

まず直線 y=mx は(0,0)を通る傾き m の直線です。これが円と 2 点で交わるとありますが、m の値によって円との交わりが変わります。グラフにおいて 2 点で交わるということは、方程式においては直線と円の連立方程式が **2 つの異なる実数解を持つ**ということです。**判別式 D>0 を思い出しましょう。**

$y=mx$を$(\mathrm{x}-1)^2+(y-1)^2=1$に代入します。
$(x-1)^2+(mx-1)^2=1$
$(m^2+1)x^2-2(m+1)x+1=0$　　—(※)
この x についての 2 次方程式が 2 つの異なる実数解をもつとき、この方程式の判別式を D とすると
$\mathrm{D}>0$
$\Leftrightarrow 4(m+1)^2-4(m^2+1)>0$
$\Leftrightarrow (m+1)^2-(m^2+1)>0$
$\Leftrightarrow 2m>0 \quad \Leftrightarrow m>0$　—①
と、パラメータ m についての条件が現れます。この m を使って、軌跡を追いたい点 M の座標を求めましょう。

点 M は点 P,Q の中点なので、点 P,Q の座標から求めます。2 点は直線と円の交点なので

(※)式の 2 つの実数解がそれぞれの x 座標です。(※)から解いて 2 つの x を y=mx に代入すればそれぞれの y 座標も分かります。

点 P,Q の x 座標は二次方程式

$(m^2+1)^2x^2-2(m+1)x+1=0$の 2 つの実数解です。これを解くと

$x=\dfrac{m+1\pm\sqrt{2m}}{m^2+1}$

点 P,Q には決まりがないので、ここでは x 座標の小さい方を P とします。すると

$$\mathrm{P}\left(\frac{m+1-\sqrt{2m}}{m^2+1},\frac{m\left(m+1-\sqrt{2m}\right)}{m^2+1}\right)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{m+1+\sqrt{2m}}{m^2+1},\frac{m\left(m+1+\sqrt{2m}\right)}{m^2+1}\right)$$

これより、点 M は

$$\mathrm{M}(X,Y)=\left(\frac{m+1}{m^2+1},\frac{m(m+1)}{m^2+1}\right)$$

※問題集の解答では解と係数の関係を用いて直接 M の座標を求めていますが、それに気づけなければ上に示したように順当に座標を求めます。

$X=\dfrac{m+1}{m^2+1}$—②$,Y=\dfrac{m(m+1)}{m^2+1}$の 2 式からmを消去し、

XとYのみの関係式にします。

まず$Y=mX$—③の関係があります。ここから$m=\frac{Y}{X}$に変形しますが、その前に

分母Xが 0 のときを考慮しなければなりません。

$X=0$のとき、②より$m=-1$ですが、これは①の条件を満たさないので、$X\neq0$です。

このとき③$\Leftrightarrow m=\frac{Y}{X}$

これを②に代入してmを消去します。

$$X = \frac{\frac{Y}{X} + 1}{\left(\frac{Y}{X}\right)^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow X\left\{\left(\frac{Y}{X}\right)^2 + 1\right\} = \frac{Y}{X} + 1$$ ← 両辺を$\left\{\left(\frac{Y}{X}\right)^2 + 1\right\}$倍しました。

$$\Leftrightarrow X^2\left\{\left(\frac{Y}{X}\right)^2 + 1\right\} = Y + X$$ ← 両辺をX倍しました。

$\Leftrightarrow Y^2 + X^2 = Y + X$　　← 左辺を展開しました。

$\Leftrightarrow X^2 - X + Y^2 - Y = 0$　← 変数を左辺に移項しました。

この方程式を見ると X と Y の 2 次式になっているので、**円の方程式になることが予想できます**。X と Y でそれぞれ平方完成させます。

$$\Leftrightarrow \left(X^2 - X + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + \left(Y^2 - Y + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(X^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 0$$

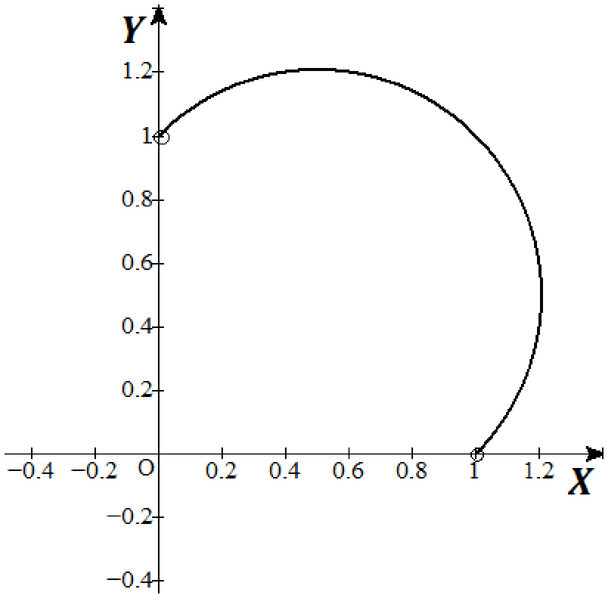
$$\Leftrightarrow \left(X^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \qquad —(\alpha)$$

これは中心が$(X, Y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$、半径が$\frac{1}{\sqrt{2}}$の円です。ここで①と③の条件を忘れないようにしましょう。

$$m = \frac{Y}{X} > 0$$

これを満たすのは、分子と分母の符号が一致することが必要になります。つまり **X と Y の符号が一致するとき**なので、

$XY > 0 \qquad —(\beta)$



以上よりmについての条件①②③をX,Yのみで書き換えた条件$(\alpha)(\beta)$を図示します。

円(α)の第 1 象限部分が求める軌跡であり、左図の通りです。(0,1)および(1,0)は除外点となります。