数学III 基礎問題精講 解説

P150｜基礎問82

・媒介変数はとにかく消そうと考える！

普通、xとyの関係式というのは、xとyの関係が直接表されます。

$y = 2x + 1$
$x^2 + y^2 = 4$

一方、媒介変数を用いて、その関係が表されることもあります。例えば、

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \end{cases} \quad ・・・（★）$$

は、そのような関係にありますね。xとyはtを媒介として関係が成り立っているので、tを媒介変数と呼ぶのです。ただ、この（★）の場合、媒介変数を使って表されていたとしても、tを消してxとyの関係を直接表すことができます。

$x = t + 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = x - 1$
$\therefore y = 2t = 2(x-1) = 2x - 2$

このように、媒介変数というのは消して考えるのがまず最初にやることです。

数IIB基礎問題精講「基本問47」や、数IIB標準問題精講「標問51」「標問61」「標問63」でもこれを同じように考えます。

・媒介変数を消せないときは、媒介変数を中心に考える

今回の問題でも媒介変数θを消してx, yの関係を直接表すことができたらいいのですが、どうもできなそうです。そのような場合、媒介変数を使って使って考えます。「使って考えます」というより、「媒介変数を中心に考える」といったほうが正しいでしょう。

というのも、グラフをかく際につくる増減表では「θが変化したとき、がどの $x, \ y, \ \dfrac{dy}{dx}$ ように変化するか」を求める必要があるからです。

＜比較＞

………………………………………………………………………………………………

これまでは、増減表をつくる際には「xが変化したとき、 $y, \ \dfrac{dy}{dx}$ がどのように変化するか」を求めてきました。

………………………………………………………………………………………………

ということで、θを中心に考えていきましょう。

・グラフの形を知るためにはやっぱり $\dfrac{dy}{dx}$ を求めないといけない

「グラフをかけ」と言われているので、やはり $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなければなりません。

しかし、もしもyがxの関数として直接表されていたら（y=x+2など）、両辺をxで微分することができますが、それはできなそうです。

そこで、 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dx}$ という公式の登場です。この公式が意味しているのは、

yをxで微分する　＝　yをθで微分したもの÷ $\dfrac{dy}{d\theta}$ **xをθで微分したもの** $\dfrac{dx}{d\theta}$

ということです。よって、まずはを $\dfrac{dy}{d\theta},\dfrac{dx}{d\theta}$ それぞれ求めましょう。これは簡単ですね。

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(1-\cos\theta)=\sin\theta$$
$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(\theta-\sin\theta)=1-\cos\theta$$

となります。あとは、 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dx}$ を用いて、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}=\sin\theta\div(1-\cos\theta)=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

となります。こうして、無事にが $\dfrac{dy}{dx}$ 求められました。

・増減表をかく（5ステップ）

あとは、これまでと同様に増減表を書いていきましょう。

ステップ①　定義域を明確にする

増減表を書くときに初めにやることは、定義域を書くことです。これまではxの定義域を書いていましたが、媒介変数が登場する場合は、媒介変数が主役です。よって、一番上に書く定義域はθの定義域を書きます。

問題文から、0≦θ≦2πとあるのでこれを定義域としたいですが、 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ と表せるのは1-cosθ≠0 のとき（つまり、θ≠0, 2πのとき）です。

よって、定義域は0<θ<2πとなります。

▽増減表

$\boldsymbol{\theta}$	0	…	2π

ステップ② $\dfrac{dy}{dx}=0$ となるθを求める

続いて、 $\dfrac{dy}{dx}=0$ となる場合のθの値も求めます。それは、

$$\frac{dy}{dx}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=0$$

なので、1-cos$\theta \neq 0$ なので1-cosθを両辺にかけると、sinθ=0

つまり、$\theta=\pi$ のときにと $\dfrac{dy}{dx}=0$ なります。よって、増減表は次のようになります。

▽増減表

$\boldsymbol{\theta}$	0	…	π	…	2π

では、この定義域において、 x, y, $\dfrac{dy}{dx}$ はどのように対応するでしょう？

ステップ③ xはどうなるか？

次は、xがどうなるかを書き込みます。これは、実際にx=θ-sinθに代入すればよいです。

▽増減表

$\boldsymbol{\theta}$	0	…	π	…	2π
x	0	…	π	…	2π

ステップ④ $\dfrac{dy}{dx}$ の符号はどう変化するか？

続いて、 $\dfrac{dy}{dx}$ の符号を決めなくてはなりません。 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ ですので、

0～πのとき（具体的に$\theta=\pi/2$を代入してみると、+になるので）・・・ 正（+）
π～2πのとき（具体的に$\theta=3\pi/2$を代入してみると、－になるので）・・・負（－）

です。よって、増減表は次のようになります。

▽増減表

θ	0	…	π	…	2π
x	0	…	π	…	2π
$\frac{dy}{dx}$	/	+	0	-	/

ステップ⑤　yはどう変化するか？

最後に、 $\dfrac{dy}{dx}$ の結果を用いて、yがどのように変化するかを求めます。

すると、次のように増減表を埋めることができます。

▽増減表

θ	0	…	π	…	2π
x	0	…	π	…	2π
$\frac{dy}{dx}$	/	+	0	-	/
y	/	↗	2	↘	/

・グラフをかけと言われたらやること（他に）

さて「グラフをかけ」と言われたときにやることは、他にもありましたね。

以上から、解答にあるようなグラフになるのです。

・曲線C上の点Pの接線の傾きがπ/6ということなので・・・

問題文を言い換えると「曲線C上の点Pの接線の傾きがπ/6のとき」ということです。

よって、 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\dfrac{\pi}{6} \quad \therefore \theta=\dfrac{2\pi}{3}$

となります。あとはこのθを、

$x=\theta-\sin\theta$
$y=1-\cos\theta$

に代入して終わりです。

・補足：媒介変数の強み

なぜ（２）のような問題が出題されているかというと、角度を表す媒介変数θを用いると「接線の角度」など角度を使う問題が簡単に解けるからです。それを実感してもらうために出題されたのでしょう。