

Q.(数3 標準問題精講 p204 研究)

なぜ積分範囲を  $\frac{\pi}{n}$  から  $a$  に変えても  $S$  は  $\frac{2}{n}$  になるのですか。

A.

まず、積分範囲を変えても  $S$  が変化しないわけではありません。

最初に、解き方の流れを説明すると、

$n$  を変化させたときの  $S$  が直接は求めにくいので、積分範囲に面積が比例する (①)  $T$  の面積を求めた上で、 $n$  を変化させても  $S$  と  $T$  との比が一定である (②) ことを利用して  $S$  を求めます。

①・・・ $T$  は区分求積により考えると、高さが常に1の長方形なので、面積は積分範囲(底辺の長さ)に比例することになります。

②・・・ $\frac{S}{T} = \frac{2}{\pi}$  (一定) になることから、 $S$  の面積は  $n$  を変化させてもいつも  $T$  の  $\frac{2}{\pi}$  倍になり、 $T$  に比例することがわかります。

ここで、 $T$  の積分範囲を0から  $a$  までにすると  $T = \int_0^a 1 dx = a$  です。

次に、②より常に  $S$  は  $T$  の  $\frac{2}{\pi}$  倍であることから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} In &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a |\sin nx| dx \\ &= \frac{2}{\pi} T = \frac{2}{\pi} \int_0^a 1 dx = \frac{2}{\pi} \cdot a \quad \text{となります。} \end{aligned}$$