

# 数学ⅡB 標準問題精講 解説

P114 | 標問51

- ・ 「パラメーターを含む2直線の交点の軌跡」は、パラメーターを消すのが定石【(1)に対応】

数ⅡB 基礎問題精講「47 軌跡(V)」の問題を覚えているでしょうか？

<問題>

mを実数とする。xy平面上の2直線

$$mx-y=0 \cdots \textcircled{1}$$

$$x+my-2m-2=0 \cdots \textcircled{2}$$

について、①, ②の交点の軌跡を求めよ (3の問題)。

この問題では、

**mを変化させると、それに応じて直線①, ②が決まる。その時にできる交点を取っていくと、ある軌跡 (= 円) になる**

ということがわかりました。具体的に、 $m=1$ 、 $m=2$ 、 $\cdots$ とやってみると、イメージがつくはずですが、では、以上を踏まえた上で、どのようにして交点の軌跡を求めたらよいのでしょうか？

最終的に求めたいのは、交点におけるxとyの関係です。

交点において、xとyは、

$$mx-y=0 \cdots \textcircled{1}$$

$$x+my-2m-2=0 \cdots \textcircled{2}$$

という2つの条件を満たしているようですが、mが邪魔ですね。

mを消すことができたら、純粋にxとyの関係が出てきます。

ということで、①式から $m=y/x$ として②に代入することで、xとyだけの関係式にしようと考えます。

ただし、何も考えずに $m=y/x$ としてはいけません。

分母のxが0ではない時ですので、場合分けして考える必要があるのです。

・「基礎問47 軌跡(V)」と全く同じ考え方をする、今回の「標問51」

以上のことが理解できたら、今回の「標問51」も同じように解くことができます。最終的には、

$$ax+y=a \cdots \textcircled{1}$$

$$x-ay=-1 \cdots \textcircled{2}$$

という二つの関係を満たす $x$ と $y$ の関係を示したいので、 $x$ と $y$ 以外の文字（今回の場合は $a$ ）を消さないといけません。

そのために、 $\textcircled{1}$ の式において、

$$ax+y=a \Leftrightarrow a(x-1)=-y \text{ と変形して、}$$

$$a=-y/(x-1)$$

を $\textcircled{2}$ の式に代入しようと考えます。

しかし、このように変形していいのは、 $x \neq 1$ のときなので、そのようにして進めます。

・ $x \neq 1$ のとき、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow a(x-1)=-y \Leftrightarrow a=-y/(x-1) \text{ これを}\textcircled{2}\text{に代入して、}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad (x \neq 1)$$

このように、 $x \neq 1$ において、交点は $x^2 + y^2 = 1$ という軌跡を描くことがわかりました。

しかし、これはもともと、 $a=\sim$ の形にするために、分母が0にならないようにしただけで、 $a$ の値に関わらず $x$ と $y$ が交点を持ったとしたら、それは軌跡の一つになります。

では、そのような場合、交点を持つのかを調べてみましょう。

・ $x=1$ のとき、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow y=0$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow 1-ay=-1 \quad \textcircled{1}\text{も満たす場合、}1=-1\text{となるので、矛盾。}$$

よって、 $x=1$ の分は除かなくてはなりません。ということで、答えは、

円 $x^2 + y^2 = 1$  ただし、点 $(1, 0)$ は除く

となるのです。「基礎問47」「標問61」「標問62」「標問63」は、いずれも同じ考え方で解きますので、できるようになったか確認してみてください。