北里大学入試問題

2013 年数学

解答・解説編

①小問集合

○原則

(1)　◆ベクトルの内積

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$、$\vec{a}$ と$\vec{b}$ のなす角をθ とします。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

◆2 つのベクトルの直交条件

$$\vec{a} \perp \vec{\mathrm{b}} \left(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}\right) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

(2)　◆二項定理

$$(a+b)^n = a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

一般項　${}_nC_k a^k b^{n-k}$　$(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$

$(a+b+c)^n$ の展開式

一般項　$\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!} a^p b^q c^r$　$(p+q+r=n)$

(3)　◆線形計画法

点$(x,\ y)$が領域 D 内の点であるとき、$ax+by$ の取り得る範囲を求めるには、直線 $ax+by=k$ とy 軸との交点に着目して、グラフから読み取ります。

(4)　◆独立試行

試行 T_1，T_2 は独立であるとします。試行 T_1 で事象 A が起こる確率を$P(A)$，試行 T_2 で事象 B が起こる確率を$P(B)$ とするとき，事象 A と事象 B が同時に起こる確率は

$$P(A) \times P(B)$$

(5)　◆漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ 型

特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ の解 α を用いて

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$$

と式変形でき、数列$\{a_n - \alpha\}$ は初項$a_1 - \alpha$、公比 p の等比数列なので

$$a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha$$

◆$\sum$ の計算

$$\sum_{k=1}^{n} c = cn \ , \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \ , \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \ \ (r \neq 1)$$

○解答・解説

(1)

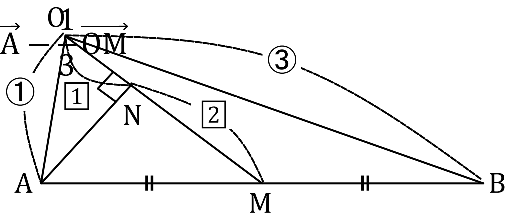
【方針】

(ⅰ) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ の始点が O なので, $\overrightarrow{\mathrm{NA}}$ も始点が O であるベクトルで表します。

(ⅱ) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$， $\overrightarrow{\mathrm{NA}}$ が垂直なので，内積$\overrightarrow{\mathrm{ON}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{NA}} = 0$ を使います。(ⅰ)の結果を使って，それぞれのベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$ で表してから内積を計算します。

【解説】

$$(\mathrm{i}) \quad \overrightarrow{\mathrm{NA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$



$$(\mathrm{ii}) \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{1}{6}\left(\vec{a} + \vec{b}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{NA}} = \frac{5}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} = \frac{1}{6}\left(5\vec{a} - \vec{b}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{ON}} \perp \overrightarrow{\mathrm{NA}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{NA}} = 0$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{NA}} = \frac{1}{6}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \frac{1}{6}\left(5\vec{a} - \vec{b}\right) = 0$$

$\mathrm{OA} : \mathrm{OB} = 1 : 3$ より，$|\vec{a}| : \left|\vec{b}\right| = 1 : 3 \iff \left|\vec{b}\right| = 3|\vec{a}|$

また，$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos\theta = 3|\vec{a}|^2 \cos\theta$

これらを①に代入して

$$5|\vec{a}|^2 + 4 \times 3|\vec{a}|^2 \cos\theta - (3|\vec{a}|)^2 = 0$$

(2)

【方針】

原則を使って，$(x + 2y + 3z)^6$ の一般項を求めます。求める項の次数を一般項に代入して係数を計算します。

【解説】

$(x+2y+3z)^6$ を展開したときの一般項は

$$\frac{6!}{p!\,q!\,r!}x^p(2y)^q(3z)^r=\frac{6!\,2^q3^r}{p!\,q!\,r!}x^py^qz^r\ \ (p+q+r=6)$$

とおけます。ただし，p，q，r は 0 以上の整数です。

x^4y^2 の係数は，$p=4$，$q=2$，$r=0$ のときなので

$$\frac{6!\,2^2 3^0}{4!\,2!\,0!}=\underline{60}$$

x^3y^2z の係数は，$p=3$，$q=2$，$r=1$ のときなので

$$\frac{6!\,2^2 3^1}{3!\,2!\,1!}=\underline{720}$$

(別解)

【方針】

$(x+2y+3z)^6$ の一般項を知らないときの解法です。2 項定理を繰り返し用いて $(x+2y+3z)^6$ の一般項を求めます。

【解説】

$(x+2y+3z)^6=\{(x+2y)+3z\}^6$ として二項展開したときの一般項は

$${}_6C_k(x+2y)^k(3z)^{6-k}\ \ \left(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6\right)$$

さらに，$(x+2y)^k$ を二項展開すると

$${}_kC_l x^l(2y)^{k-l}\ \ \left(l=1,\ 2,\ \cdots,\ k\right)$$

なので，$(x+2y+3z)^6$ を展開したときの一般項は

$${}_6C_k\cdot{}_kC_l x^l(2y)^{k-l}(3z)^{6-k}={}_6C_k\cdot{}_kC_l 2^{k-l}3^{6-k}x^ly^{k-l}z^{6-k}$$

x^4y^2 の係数は，$l=4$，$k=6$ のときなので

$${}_6C_6\cdot{}_6C_4 2^{6-4}3^{6-6}={}_6C_2 2^2 3^0=\frac{6\cdot 5}{2!}\cdot 2^2=\underline{60}$$

x^3y^2z の係数は，$l=3$，$k=5$ のときなので

$${}_6C_5\cdot{}_5C_3 2^{5-3}3^{6-5}={}_6C_1\cdot{}_5C_2 2^2 3^1=6\cdot\frac{5\cdot 4}{2!}\cdot 2^2\cdot 3=\underline{720}$$

(3)

【方針】

線形計画法です。$3x+y=k$ とおいて，直線 $y=-3x+k$ のy 切片に着目して k の最大値と最小値をグラフから読み取ります。

【解説】

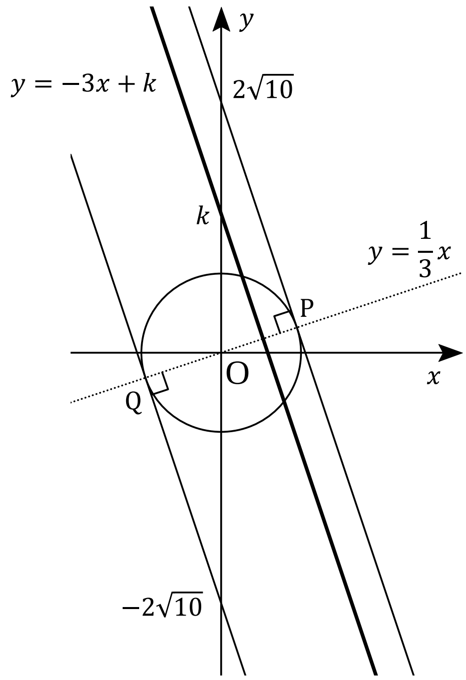
$3x+y=k\ (k$ は実数$)$ とおきます。この直線と不等式$x^2+y^2\leqq 4$ が表す領域と共有点をもつときの k の最大値と最小値を求めます。

$y=-3x+k$ より

k が最大となる $\Leftrightarrow$ 直線の y 切片が最大となる。

k が最小となる $\Leftrightarrow$ 直線の y 切片が最小となる。

これらのことを，グラフから読み取ると，直線と円が接するときであることが分かります。接点を図のように P，Q とすると，P，Q の座標は



円$x^2+y^2=4$ と直線 $y=\frac{1}{3}x$ との交点なので

$$x^2+\left(\frac{1}{3}x\right)^2=4 \text{ より，} x=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$y=\frac{1}{3}\times\left(\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$$

よって

$$\mathrm{P}\left(\frac{3\sqrt{10}}{5},\ \frac{\sqrt{10}}{5}\right),\quad \mathrm{Q}\left(-\frac{3\sqrt{10}}{5},-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$$

従って

$$x=\frac{3\sqrt{10}}{5},\ y=\frac{\sqrt{10}}{5} \text{ のとき，最大値 } 3\cdot\frac{3\sqrt{10}}{5}+\frac{\sqrt{10}}{5}=\underline{2\sqrt{10}}$$

$$x=-\frac{3\sqrt{10}}{5},\ y=-\frac{\sqrt{10}}{5} \text{ のとき，最小値 } 3\cdot\left(-\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)+\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)=\underline{-2\sqrt{10}}$$

-----(参考１)-----

直線と円が接するときの k の値は，次の方法でも求められます。

直線$3x+y-k=0$ と円 $x^2+y^2=4$ が接するとき，直線と円の中心$(0,\ 0)$との距離が円の半径 2 と等しくなるので

$$\frac{|3\cdot 0+0-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=2$$

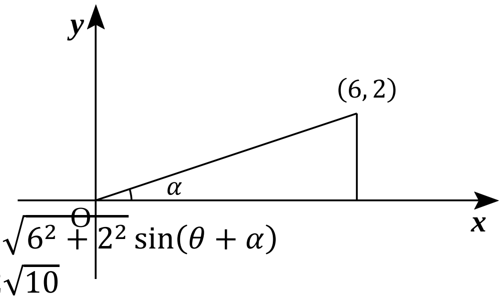
$$|-k|=|k|=2\sqrt{10}$$

よって，$k=\pm 2\sqrt{10}$

このことから，最大値は $2\sqrt{10}$，最小値は$-2\sqrt{10}$ であることが分かります。

-----(参考２)-----

点$(x,\ y)$ が円 $x^2+y^2=4$ 上の点であるとき，$3x+y$ の取り得る値の範囲は，次のように求めることができます。



点$(x,\ y)$ は円 $x^2+y^2=4$ 上の点なので

$x=2\cos\theta$，$y=2\sin\theta$

とおけます。

$$3x+y=6\cos\theta+2\sin\theta=\sqrt{6^2+2^2}\sin(\theta+\alpha)$$

$-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq 1$ より，$-2\sqrt{10}\leqq 3x+y\leqq 2\sqrt{10}$

(4)

【方針】

(ｉ)取り出した球の色が 1 種類となるのを具体的に考えると，その色は白球のみとなります。各袋から白球を取り出す確率を求め，積の法則からそれらの積が求める確率となります。

(ⅱ)取り出した球の色が 2 種類となるのを具体的に考えると，(白，赤)，(白，青)，(赤，青) の場合が考えられます。それぞれの確率を求めます。

(ⅲ)取り出した球の色が 3 種類となるのは(白，赤，青) であり，どの袋からどの色の球がでるのかを具体的に考えて確率を求めます。

【解説】

（ｉ）取り出した 3 個の球の色が 1 種類となるのは，それが白球の場合のみです。

袋 A から白球を取り出す確率

$$P_A(\text{白})=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

袋 B から白球を取り出す確率

$$P_B(\text{白})=\frac{1}{4}$$

袋 C から白球を取り出す確率

$$P_C(\text{白})=\frac{1}{4}$$

よって，求める確率は

$$P_A(白)\times P_B(白)\times P_C(白)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\underline{\frac{1}{32}}$$

（ⅱ）取り出した 3 個の球の色が 2 種類となるのは，次の場合です。それぞれについて確率を求めます。

（ア）白球・赤球のとき

このとき，さらに次のように場合分けします。

① $(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})=(白，白，赤)$

このときの確率は

$$P_A(白)\times P_B(白)\times P_C(赤)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{16}$$

② $(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})=(赤，白，赤)$

このときの確率は

$$P_A(赤)\times P_B(白)\times P_C(赤)=\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{16}$$

③ $(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})=(赤，白，白)$

このときの確率は

$$P_A(赤)\times P_B(白)\times P_C(白)=\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$$

①②③は互いに排反なので，白球・赤球が取り出される確率は

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{5}{32}$$

（イ）白球・青球のとき

このとき，さらに次のように場合分けします。

① $(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})=(白，白，青)$

このときの確率は

$$P_A(白)\times P_B(白)\times P_C(青)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$$

② $(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})=(白，青，白)$

このときの確率は

$$P_A(白)\times P_B(青)\times P_C(白)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

③ $(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})=(白，青，青)$

このときの確率は

$$P_A(\text{白})\times P_B(\text{青})\times P_C(\text{青})=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

①②③は互いに排反なので，白球・青球が取り出される確率は

$$\frac{1}{32}+\frac{3}{32}+\frac{3}{32}=\frac{7}{32}$$

（ウ）赤球・青球のとき

このとき，さらに次のように場合分けします。

① $(\text{A},\ \text{B},\ \text{C})=(\text{赤},\ \text{青},\ \text{赤})$

このときの確率は

$$P_A(\text{赤})\times P_B(\text{青})\times P_C(\text{赤})=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{16}$$

② $(\text{A},\ \text{B},\ \text{C})=(\text{赤},\ \text{青},\ \text{青})$

このときの確率は

$$P_A(\text{赤})\times P_B(\text{青})\times P_C(\text{青})=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

①②③は互いに排反なので，白球・青球が取り出される確率は

$$\frac{3}{16}+\frac{3}{32}=\frac{9}{32}$$

（ア）（イ）（ウ）は互いに排反なので，求める確率は

$$\frac{5}{32}+\frac{7}{32}+\frac{9}{32}=\underline{\frac{21}{32}}$$

（iii）取り出した 3 個の球の色が 3 種類となるのは，次の場合です。それぞれについて確率を求めます。

（ア）$(\text{A},\ \text{B},\ \text{C})=(\text{白},\ \text{青},\ \text{赤})$

このときの確率は

$$P_A(\text{白})\times P_B(\text{青})\times P_C(\text{赤})=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{16}$$

（イ）$(\text{A},\ \text{B},\ \text{C})=(\text{赤},\ \text{白},\ \text{青})$

このときの確率は

$$P_A(\text{赤})\times P_B(\text{白})\times P_C(\text{青})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$$

（ウ）$(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) = (赤, 青, 白)$

このときの確率は

$$P_A(赤) \times P_B(青) \times P_C(白) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$$

（ア）（イ）（ウ）は互いに排反なので

$$\frac{3}{16} + \frac{1}{32} + \frac{3}{32} = \frac{10}{32} = \underline{\frac{5}{16}}$$

-----参考-----

（ⅱ）は場合分けが多く大変です。球の色の出方は，（ⅰ）（ⅱ）（ⅲ）のいずれかになので，（ⅰ）（ⅲ）を求め，全体の確率 1 からそれらを引くと（ⅱ）が得られます。

$$1 - \left(\frac{1}{32} + \frac{5}{16}\right) = \underline{\frac{21}{32}}$$

(5)

【方針】

原則に従い，与えられた漸化式の一般項を求めます。また，和S_nをΣの計算により求めておいてから，S_8を計算します。後半の不等式は，式を整理した後，およその見当をつけ，nに具体的な値を代入し，実験しながら解を見つけます。

【解説】

$$a_{n+1} = 2a_n - 3$$

数列$\{a_n - 3\}$は初項$a_1 - 3 = 5 - 3 = 2$，公比 2 の等比数列なので

$a_n - 3 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

よって

$\underline{a_n = 2^n + 3}$

また

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2^k + 3) = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} + 3n$$

より

$S_8 = 2^9 + 3 \times 8 - 2 = \underline{534}$

次に

$$\frac{S_n}{3} > n + 16666$$

$$S_n > 3n + 3 \times 16666$$

$2^{14} = 16384$，$2^{15} = 32768$ より，不等式を満たす最小の n は $\underline{15}$

②行列

○原則

Ⅰ．◆行列の積

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ のとき

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$$

一般に交換法則は成立しません。すなわち

$$AB \neq BA$$

Ⅱ．◆行列の二項定理

$AB = BA$ のとき

$$(A + B)^n = A^n + {}_nC_1A^{n-1}B + {}_nC_2A^{n-2}B^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}AB^{n-1} + B^n$$

一般項　${}_nC_kA^kB^{n-k}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$

○解答・解説

(1)

【方針】

行列の積の定義式から計算します。

【解説】

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 + 4 & -8 - 2 \\ -8 - 2 & 4 + 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4 & -2 + 2 \\ 8 - 8 & -4 + 4 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$BA=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-4 & 8-8\\ -2+2 & -4+4\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$$

(2)

【方針】

A^2 を計算してみると，$A^2=5A$ が得られます。この式から，A^n とA^{n-1} の関係式を求めます。そのとき，$A^n=A^2A^{n-2}$ と式変形したいので，$n\geqq 2$ のときと，$n=1$ のときとで場合分けが生じます。

【解説】

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4 & 2+8\\ 2+8 & 4+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 10 & 20\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=5A$$

$n\geqq 2$ のとき，$A^0=E$ として

$$A^n=A^2A^{n-2}=5A\cdot A^{n-2}=5A^{n-1}$$

なので

$$A^n=5A^{n-1}=5^2A^{n-2}=5^3A^{n-3}=\cdots=5^{n-1}A$$

これは，$n=1$ のときも成立します。よって

$$A^n=5^{n-1}A=5^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}5^{n-1} & 2\cdot 5^{n-1}\\ 2\cdot 5^{n-1} & 4\cdot 5^{n-1}\end{pmatrix}}$$

(別解)

【方針】

$A^2=5A$ から一般項を推測して，数学的帰納法で証明します。

【解説】

$A^2=5A$ より，$A^3=5A^2=5^2A$，$A^4=A^3A=5^2A^2=5^3A$ なので
$A^n=5^{n-1}A$ と推測し，数学的機能法で証明します。

（Ⅰ）$n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=A,\ (\text{右辺})=5^0A=A$$

よって，成立

（Ⅱ）$n=k$ のとき成り立つと仮定する。即ち

$$A^k=5^{k-1}A$$

$n=k+1$ のとき

$$A^{k+1}=A^kA=5^{k-1}A^2=5^{k-1}\cdot 5A=5^kA$$

よって，$n=k+1$ のときも成立

（Ⅰ）（Ⅱ）より全ての自然数 n について成立

(3)

【方針】

一般に行列は交換法則が成り立たない，つまり $AB \neq BA$ なので，2 項定理を使って $(A+B)^n$ を展開することはできません。しかしこの問題では(1)より $AB = BA = O$ なの 2 項展開することができます。

B^n が必要になりますが，(2)と同様にして求めることができます。

【解説】

（1）より $B^2 = 5B$ なので，(2)と同様にして

$$B^n = 5^{n-1}B$$

が成立します。さらに(1)から

$$AB = BA = O$$

つまり，行列 A と B は交換法則が成り立ちます。

このことから，2 項定理が利用でき

$$\begin{aligned}(A-2B)^n &= \{A+(-2B)\}^n \\ &= {}_nC_0A^n + {}_nC_1A^{n-1}(-2B) + {}_nC_2A^{n-2}(-2B)^2 + \cdots \\ &\qquad + {}_nC_{n-1}A^1(-2B)^{n-1} + {}_nC_n(-2B)^n \\ &= A^n + (-2B)^n \\ &= \underline{5^{n-1}A + (-2)^n \cdot 5^{n-1}B}\end{aligned}$$

③微積分

○原則

Ⅰ．◆積と商の微分法

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

Ⅱ．◆対数の性質

$a, b, c > 0$，$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$，$M, N > 0$ とする。

Ⅰ）$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$　Ⅱ）$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

Ⅲ）$\log_a M^k = k \log_a M$　Ⅳ）$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Ⅲ．◆対数関数　$y=\log_a x$ (底の条件 $a>0, a\neq 1$　真数条件 $x>0$)

　　ｉ) $a>1$ のとき　　　$p<q \iff \log_a p<\log_a q$　増加関数

　　ⅱ) $0<a<1$ のとき　$p<q \iff \log_a p>\log_a q$　減少関数

○解答・解説

(1)

【方針】

商の微分法に従い，導関数 $f'(x)$ を求めます。

【解説】

$$f'(x)=\frac{\{\log(x+1)\}'\log x-\log(x+1)(\log x)'}{(\log x)^2}$$

$$=\underline{\hspace{12em}}$$

(2)

【方針】

与えられた不等式は，底が揃っていないので自然対数で表します。すると(1)の$f(x)$を用いて不等式を表すことができます。その結果，$f(x)$ が単調減少関数であればよいことが分かりその為に，$f'(x)<0$ を示します。

【解説】

$$\log_3 2<\log_4 3<\log_5 4<\log_6 5<\log_7 6<\log_8 7<\log_9 8<\log_{10} 9 \cdots ①$$

底を変換して

$$\frac{\log 2}{\log 3}<\frac{\log 3}{\log 4}<\frac{\log 4}{\log 5}<\frac{\log 5}{\log 6}<\frac{\log 6}{\log 7}<\frac{\log 7}{\log 8}<\frac{\log 8}{\log 9}<\frac{\log 9}{\log 10}$$

を示せばよいことになります。

さらに，$\dfrac{\log 2}{\log 3}=\dfrac{1}{f(2)}$ なので

$$\frac{1}{f(2)}<\frac{1}{f(3)}<\frac{1}{f(4)}<\frac{1}{f(5)}<\frac{1}{f(6)}<\frac{1}{f(7)}<\frac{1}{f(8)}<\frac{1}{f(9)}$$

つまり①を示すには，$x \geqq 2$ のとき

$\dfrac{1}{f(x)}$ が増加関数，すなわち$f(x)$は減少関数である

ことが分かればよい。

(1)より

$$f'(x)=\frac{x\log x-(x+1)\log(x+1)}{x(x+1)(\log x)^2}$$

ここで，$x>1$ のとき$\log x>0$ で，x， $\log x$ は増加関数なので $x\log x$ も増加関数なので，$x\log x<(x+1)\log(x+1)$ $(x>1)$
よって

$$f'(x)=\frac{x\log x-(x+1)\log(x+1)}{x(x+1)(\log x)^2}<0\ (x>1)$$

従って，$f(x)$ は減少関数なので，①は示されます。