昭和 2015 数学

略解

1

(1)(1 − 1) $a<2$　(1 − 2) $a<4$　(2)(2 − 1) $\dfrac{3}{7}$　(2 − 2)8

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{5}{12}\pi,\quad \dfrac{23}{12}\pi \leqq x < 2\pi$　(4)78 桁

2

(1)41 番目 (2) $\dfrac{1}{2}\{(m+2)^2-(m+3n)+2\}$番目 (3)(10,11)

(4) $c_1+\cdots+c_{200}=S$ とおくと

$$\begin{aligned}S&=1\cdot1+(1\cdot2+2\cdot1)+\cdots+(1\cdot20+2\cdot19+\cdots+10\cdot11)\\&=1\cdot1+(1\cdot2+2\cdot1)+\cdots+(1\cdot20+2\cdot19+\cdots+20\cdot1)\\&\qquad-(11\cdot10+12\cdot9+\cdots+20\cdot1)\\&=\sum_{l=1}^{20}\{\sum_{k=1}^{l}k\,(l+1-k)\}-\sum_{k=1}^{10}k\,(21-k)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l}k\,(l+1-k)&=(l+1)\sum_{k=1}^{l}k-\sum_{k=1}^{l}\mathrm{k}^2\\&=(l+1)\cdot\frac{1}{2}l(l+1)-\frac{1}{6}l(l+1)(2l+1)\\&=\frac{1}{6}\{3(l^3+2l^2+l)-(2l^3+3l^2+l)\}\\&=\frac{1}{6}(l^3+3l^2+2l)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}k\,(21-k)&=21\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}\mathrm{k}^2\\&=21\cdot\frac{1}{2}\cdot10\cdot11-\frac{1}{6}\cdot10\cdot11\cdot21\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\cdot10\cdot11\cdot21\\&=770\end{aligned}$$

であるので、

$$S=\frac{1}{6}\sum_{l=1}^{20}(l^3+3\,l^2+\;2l)-770$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot20\cdot21\right)^2+\;3\cdot\frac{1}{6}\cdot20\cdot21\cdot41+2\cdot\frac{1}{2}\cdot20\cdot21\right\}-770\quad=8085\quad\cdots(答)$$

3

(1)(1 − 1) 12　(1 − 2)$\dfrac{2}{7}\sqrt{6}$　(1 − 3) $\dfrac{5}{2}\sqrt{6}$　(2) $-\dfrac{16}{243}$　(3)$2\sqrt{5}+1$　(4) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}<m<\dfrac{\sqrt{14}}{7}$

4

(1)(1 − 1)$\frac{\pi}{4}$　(1 − 2)$\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\log 2$

(2)

$\lim_{x\to\pi}(x-\pi)=0$ であるから $\lim_{x\to\pi}(\sqrt{a+\cos x}-b)=0$ であることが必要。

ゆえに $\sqrt{a-1}-b=0$
よって $b=\sqrt{a-1}$
このとき

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{a+\cos x}-b}{(x-\pi)^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{a+\cos x}-\sqrt{a-1}}{(x-\pi)^2}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{(a+\cos x)-(a-1)}{(x-\pi)^2(\sqrt{a+\cos x}+\sqrt{a-1})}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2(\sqrt{a+\cos x}+\sqrt{a-1})}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos^2 x}{(x-\pi)^2(\sqrt{a+\cos x}+\sqrt{a-1})(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{(x-\pi)^2(\sqrt{a+\cos x}+\sqrt{a-1})(1-\cos x)}$$

ここで $x-\pi=\theta$ とおくと，$x=\theta+x$ であるので

$$\sin^2 x=\sin^2(\theta+\pi)=(-\sin\theta)^2=\sin^2\theta$$

$$\cos x=\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$$

$x\to\pi$ のとき $\theta\to 0$ であるので，極限値は

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^l\theta}{\theta^2(\sqrt{a-\cos\theta}+\sqrt{a-1})(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\{(\frac{Si0\theta}{\theta})^2\cdot\frac{1}{(\sqrt{a-\cos\theta}+\sqrt{a-1})(1+\cos\theta)}\}$$

$$=1^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{\alpha-1}(1+1)}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{\alpha-1}}$$

この値が$\frac{1}{8}$なので

$4\sqrt{\alpha-1}=8$ よって $\alpha=5$ …(答)

このとき $\mathrm{b}=\sqrt{5-1}=2$ …(答)

昭和大学医学部入試問題

2015年Ⅰ期数学

解答・解説編

①小問集合

○原則

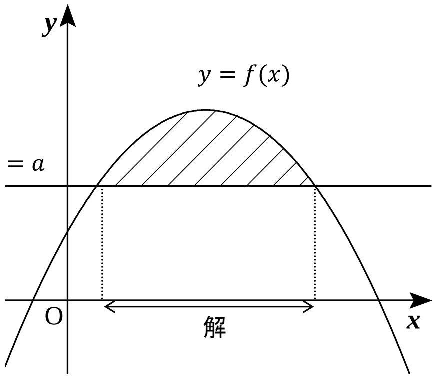
(1) ◆不等式とグラフ

不等式を解くときに、グラフの視点から見るのは有効な手段です。方程式をグラフを使って考えたときと同様に、与えられた不等式を

$f(x) > a$ (定数関数)

のように式変形して、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ のグラフを書きます。

曲線が直線より上側にあるところが不等式の解になります。



(2) ◆余事象を使った確率の計算

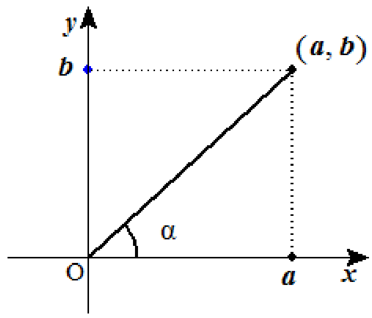
$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

(3) ◆三角関数の合成

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし、

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



(4) ◆対数の性質

$a, b, c > 0,\ \ a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0,\ \ M, N > 0$ とする。

Ⅰ） $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$　Ⅱ） $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

Ⅲ） $\log_a M^k = k\log_a M$　Ⅳ） $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

◆常用対数の利用

正の数 Nがn桁である。

$\Leftrightarrow 10^{n-1} \leqq N < 10^n$

$\Leftrightarrow n-1 \leqq \log_{10} N < n$

○解答・解説

(1)

【方針】

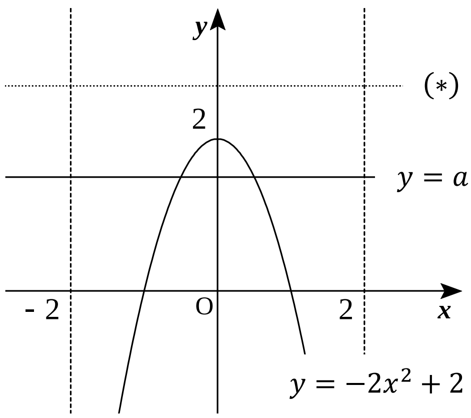
(1-1) 不等式の問題をグラフからの視点で考えます。$g(x) < f(x)$ より、$a < -2x^2 + 2$ が得られます。ここで、直線 $y = a$ と放物線 $y = -2x^2 + 2$ のグラフを書き、$-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $y = a$ のグラフが $y = -2x^2 + 2$ より下側にくるように a の範囲を図から求めます。

(1-2) (1-1)と同様に、グラフを書いて考えます。放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフを書き a の値をいろいろと変えてみると、$y = g(x)$ は y 軸方向に平行移動します。そのとき題意を満たすように、$y = g(x)$ のグラフの頂点と $y = f(x)$ のグラフの頂点との位置関係を考えます。

【解説】

(1-1) $g(x) < f(x)$ より、

$$x^2 + 2x + a < -x^2 + 2x + 2$$
$$a < -2x^2 + 2 \cdots ①$$



①を満たす実数 x が $-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲に存在するように a の値の範囲を求めます。

直線 $y = a$ と放物線 $y = -2x^2 + 2$ のグラフは図のようになり、直線 $y = a$ が(*)の位置にあるときは題意を満たしませんが、図のように実線の位置にあるときは題意を満たします。

このことから、$\underline{a < 2}$ であればよいことが分かります。

(1-2) (1-1)と同様に 2 つの放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフを書いて考えます。その為に平方完成して頂点の座標を求めましょう。

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 2x + 2 \\ &= -(x^2 - 2x) + 2 \\ &= -\{(x-1)^2 - 1\} + 2 \\ &= -(x-1)^2 + 3 \end{aligned}$$

頂点の座標$(1,\ 3)$

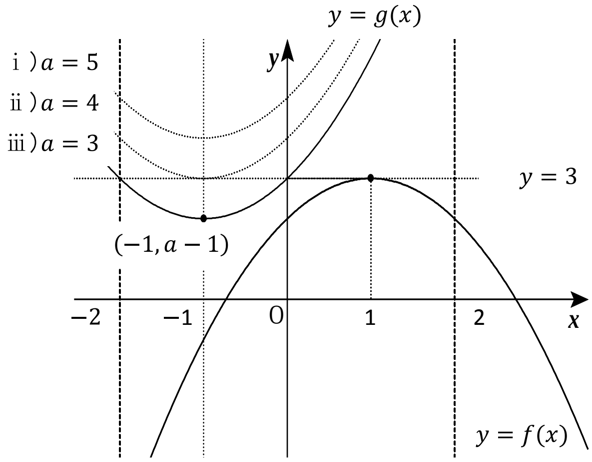
$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 2x + a \\ &= (x+1)^2 + a - 1 \end{aligned}$$

頂点の座標$(-1,\ a-1)$

a の値が変化すると、$y=g(x)$ は y 軸方向に平行移動します。

グラフから、$g(x)$ の頂点の y 座標 $a-1$ が、$f(x)$ の頂点の y 座標 3 よりも大きいか等しいときは、題意を満たしません。［図のⅰ）ⅱ）］

なぜなら、$f(x)$ が最大値 $f(1)=3$ をとるときでさえ、$g(x_1)<f(1)$ を満たす $g(x_1)$ は存在しません。



しかし、$a-1<3$ のときは、題意を満たします［図のⅲ）］。

例えば、$x_1=-1,\ x_2=1$ のとき $g(x_1)<f(x_2)$ が成り立ちます。

従って、$\underline{a<4}$

(2)

【方針】

(2-1) 2 個の球が同色となるのは、白で同色となる場合と黒で同色となる場合が考えられます。それぞれの確率の和を求めてもいいですが、ここでは余事象を考えましょう。全体の確率 1 から、余事象である白 1 個、黒 1 個を取り出す確率を引きます。

(2-2) (2-1)の考え方をヒントにして、p_n を求めます。やはり余事象を使います。

求めた p_n を $p_n \geqq \dfrac{1}{2}$ に代入すると、n についての 2 次不等式に帰着します。

【解説】

(2-1) 事象「2 個の球が同色となる」の余事象は、「2 個の球のうち白球 1 個、黒球 1 個となる」であり、この余事象が起こる確率を求めます。

白球 4 個、黒球 3 個の計 7 個の球の中から 2 個取り出して、白球 1 個、黒球 1 個取り出す確率は

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_3C_1}{{}_7C_2} = \frac{4\cdot 3}{\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}} = \frac{4}{7}$$

よって求める確率は、全体の確率 1 から余事象が起こる確率を引いて

$$p_3 = 1-\frac{4}{7} = \underline{\frac{3}{7}}$$

(2-2) (2-1)と同様に、余事象を考えて p_n を求めます。

$n+2$ 個の球から、2 個取り出す場合の数は、${}_{n+4}C_2$ 通り
白球 1 個と黒球 1 個を取り出す場合の数は、${}_4C_1 \times {}_nC_1$ 通り

よって、2 個の球が同色でない確率 $\overline{p_n}$ は

$$\overline{p_n} = \frac{{}_4C_1 \times {}_nC_1}{{}_{n+4}C_2}$$

従って

$$p_n = 1 - \frac{{}_4C_1 \times {}_nC_1}{{}_{n+4}C_2}$$

$$= 1 - \frac{4 \times n}{\frac{(n+4)(n+3)}{2 \cdot 1}} = 1 - \frac{8n}{(n+4)(n+3)}$$

$p_n \geqq \frac{1}{2}$ より

$$1 - \frac{8n}{(n+4)(n+3)} \geqq \frac{1}{2}$$

$$\frac{8n}{(n+4)(n+3)} \leqq \frac{1}{2}$$

n は自然数なので、$(n+4)(n+3) > 0$ から

$$16n \leqq (n+4)(n+3)$$

$$n^2 - 9n + 12 \geqq 0$$

この 2 次不等式を解いて

$$n \leqq \frac{9-\sqrt{33}}{2}, \quad n \geqq \frac{9+\sqrt{33}}{2}$$

ここで、$5 = \sqrt{25} < \sqrt{33} < \sqrt{36} = 6$ なので

$$\frac{9-\sqrt{33}}{2} < \frac{9-5}{2} = 2, \quad \frac{9+5}{2} = 7 < \frac{9+\sqrt{33}}{2} < \frac{9+6}{2} = 7.5$$

よって

$$n < 2, \quad n > 7 \cdots ②$$

$n \geqq 2$ なので、
②を満たす最小の n は、$\underline{n = 8}$

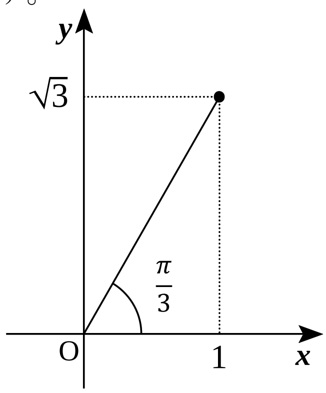
(3)

【方針】

三角関数の不等式です。不等式に $\sin x$, $\cos x$ とあるので、合成をして sin だけの不等式に変形します。x の取り得る範囲に注意します。

【解説】

与えられた不等式の左辺を合成して、sin だけの式にします。



$$\sin x + \sqrt{3}\cos x \geqq \sqrt{2}$$
$$\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geqq \sqrt{2}$$
$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geqq \sqrt{2}$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

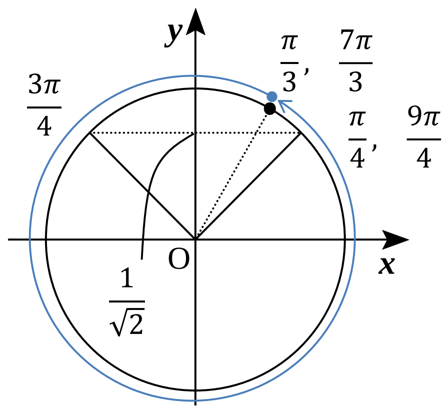
$0 \leqq x < 2\pi$ より、$\dfrac{\pi}{3} \leqq x + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{7\pi}{3}$

この範囲で、不等式を満たすのは

$$\frac{\pi}{3} \leqq x + \frac{\pi}{3} \leqq \frac{3\pi}{4},\quad \frac{9\pi}{4} \leqq x + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3}$$

よって

$$\underline{0 \leqq x \leqq \frac{5\pi}{12},\quad \frac{23\pi}{12} \leqq x < 2\pi}$$



(4)

【方針】

大きな数の桁数を求める問題です。原則に従い常用対数を利用して求めます。

【解説】

$$\begin{aligned}\log_{10} 6^{100} &= 100\log_{10} 6 = 100(\log_{10} 2 + \log_{10} 3)\\ &= 100(0.3010 + 0.4771) = 100 \times 0.7781\\ &= 77.81\end{aligned}$$

よって

$$77 < \log_{10} 6^{100} < 78$$
$$10^{77} < 6^{100} < 10^{78}$$

従って、6^{100} は $\underline{78}$ 桁の整数です。

②数列

○原則

１．◆群数列

数列$\{a_n\}$を第n群の項数がb_nとなるように群に分けます。

第n群の先頭の項は、始めから数えて$b_1+b_2+\cdots+b_n+1$番目なので、この値をpとおけば、a_pで表されます。

○解答・解説

(1)

【方針】

格子点を群に分けて考える、群数列の問題です。第n群を$x+y=n+1$を満たす組$(x,\ y)$の集まりとします。

2 つの組$(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$について，$a_1+b_1<a_2+b_2$のとき$(a_1,\ b_1)$方を先に並べるので、第 1 群、第 2 群、第 3 群…の順に組が並び、また$a_1+b_1=a_2+b_2$ならば、$a_1<a_2$のとき$(a_1,\ b_1)$を先に並べることから、同じ群の中では、x座標の小さい順に組を並べることが分かります。

このような群を考えると、組$(5,\ 5)$は第 9 群の先頭から 5 番目にあることが分かります。

【解説】

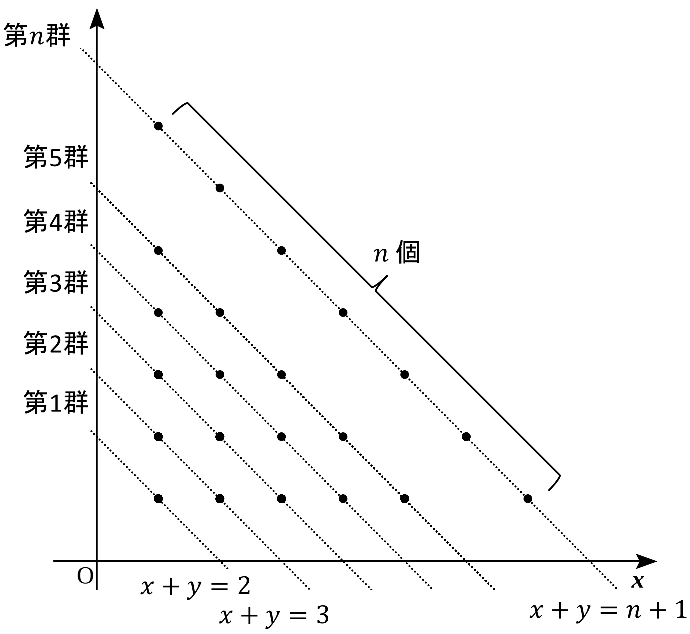
各組$(x,\ y)$ $(x,\ y$は正の整数$)$を次のような群に分けます。

第n群を$x+y=n+1$を満たすn個の組の集まりとします。

2 つの組$(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$について，$a_1+b_1<a_2+b_2$のとき$(a_1,\ b_1)$方を先に並べるので、

第 1 群、第 2 群、第 3 群…の順に組が並び、また

$a_1+b_1=a_2+b_2$ならば、$a_1<a_2$のとき$(a_1,\ b_1)$を先に並べることから、同じ群の中では、x座標の小さい順に組が並ぶことになります。



以上のことから、組$(5,\ 5)$は$x+y=5+5=10$より、第 9 群の先頭から 5 番目にあることが分かります。

第n群には、n個の組があることから、第 1 群から第 8 群までの組の総数は

$$1+2+\cdots+8=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9=36$$

よって、組$(5,\ 5)$ は$36+5=$ 41 番目にあります。

(2)

【方針】

(1)と同様に群で考えると、組$(m,\ n)$は$m+n-1$群の先頭からm番目にあります。

【解説】

組$(m,\ n)$は$m+n-1$群の先頭からm番目にあります。第k群にある組の数はk個なので、第 1 群から第$(m+n-2)$ 群までの組の総数は

$$\sum_{k=1}^{m+n-2} k=\frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)$$

$$=\frac{1}{2}\{(m+n)^2-3(m+n)+2\}$$

よって

$$\frac{1}{2}\{(m+n)^2-3(m+n)+2\}+m$$

$$=\frac{1}{2}\{(m+n)^2-(m+3n)+2\}\text{ 番目}$$

(3)

【方針】

初めから 200 番目にある組が第n群にあるとします。そして 200 番目が第 1 群から第$n-1$群までの組の総数より大きく、第n群までの組の総数より小さいことからnについての不等式をたてます。それにより自然数nを求めます。

【解説】

初めから 200 番目にある組が第n群にあるとします。

第 1 群から第$n-1$群までの組の総数は

$$1+2+\cdots+n-1=\frac{1}{2}n(n-1)$$

また、第 1 群から第 n 群までの組の総数は

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

なので、200 はこの間にあります。即ち

$$\frac{1}{2}n(n-1)<200\leqq\frac{1}{2}n(n+1)\Leftrightarrow\begin{cases}n(n-1)<400\\400\leqq n(n+1)\end{cases}$$

2 次不等式を解くのは大変なので、だいたいの見当を付けます。今回は $n^2<400$ とみて $n=20$ から不等式が成立するかどうか、代入して確かめていきます。

この連立不等式を満たす自然数 n は、$n=20$ です。

よって、200 番目は第 20 群にあります。また、19 群までには、

$$\frac{1}{2}\cdot20\cdot19=190$$

個の組があるので、200 番目は第 20 群の $200-190=10$ 番目にあります。
第 20 群にある組 $(x,\ y)$ は、$x+y=20+1=21$ を満たすので
200 番目の組は $\underline{(10,\ 11)}$ となります。

(4)

【方針】

群単位で計算します。(3)より 200 番目の組は、第 20 群の 10 番目なので
第 1 群から第 19 群までと第 20 群の 1 番目から 10 番目までとで分けて計算します。

【解説】

$S=c_1+c_2+\cdots+c_{200}$ とおきます。

第 k 群における和を S_k とすると

第 1 群　$c_1=S_1$
第 2 群　$c_2+c_3=S_2$
第 3 群　$c_4+c_5+c_6=S_3$
　⋮
第 19 群　$c_{172}+c_{173}+\cdots+c_{190}=S_{19}$
第 20 群　$c_{191}+c_{192}+\cdots+c_{200}$

なので

$$S=S_1+S_2+\cdots+S_{19}+c_{191}+c_{192}+\cdots+c_{200}$$

まず、S_k を求めます。つまり第 k 群にある組 $(l,\ k-l+1)$ $l=1,2,\cdots k$ において積 $xy=l(k-l+1)$ の和を求めます。

$$S_k=\sum_{l=1}^{k} l(k-l+1)=\sum_{l=1}^{k}\{(k+1)l-l^2\}$$

$$=(k+1)\cdot\frac{1}{2}k(k+1)-\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

$$=\frac{1}{6}k(k+1)\{3(k+1)-(2k+1)\}$$

$$=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)=\frac{1}{6}(k^3+3k^2+2k)$$

よって

$$\mathrm{S}_1+S_2+\cdots+S_{19}=\sum_{k=1}^{19}S_k=\sum_{k=1}^{19}\frac{1}{6}(k^3+3k^2+2k)$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot 19\cdot 20\right)^2+3\cdot\frac{1}{6}\cdot 19\cdot 20\cdot(2\cdot 19+1)+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 19\cdot 20\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 19\cdot 20\left(\frac{1}{2}\cdot 19\cdot 20+39+2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 19\cdot 5\cdot 231=19\cdot 5\cdot 77$$

かけ算をすると数が大きくなって、大変です。因数分解をしていくのが、計算のコツです。

次に、第 20 群のところを計算します。

$$c_{191}+c_{192}+\cdots+c_{200}=\sum_{l=1}^{10} l(20-l+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}(21k-k^2)=\frac{21}{2}\cdot 10\cdot 11-\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot(2\cdot 10+1)$$

$$=\frac{21}{2}\cdot 10\cdot 11-\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 21$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\cdot 10\cdot 11\cdot 21=10\cdot 11\cdot 7$$

よって

$$S=19\cdot 5\cdot 77+10\cdot 11\cdot 7$$

$$=5\cdot 77\cdot(19+2)=5\cdot 77\cdot 21=\underline{8085}$$

③小問集合

○原則

(1) ◆三角形の面積

△ABC において、∠A $= \theta$ とします。△ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| \sin\theta$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}$$

◆ベクトルの内積

Ⅰ）$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とします。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

Ⅱ）$\vec{a} = (x_1,\ y_1)$, $\vec{b} = (x_2,\ y_2)$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

Ⅱ）$\vec{a} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{b} = (x_2,\ y_2,\ z_2)$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

(2) ◆二項定理

$$(a+b)^n = a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

一般項 ${}_nC_k a^k b^{n-k}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$

$(a+b+c)^n$ の展開式

一般項 $\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}a^pb^qc^r$ $(p+q+r=n)$

(3) ◆分数関数の扱い

分数関数 $= \dfrac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}$ で、(分子の次数) ≧ (分母の次数)

のときは、割り算を行って、分子の次数を下げると計算がし易くなります。

◆関数の最大値・最小値を求める

基本は、グラフを書いてグラフから最大値・最小値を読み取ることです。その為に微分して増減表を書きます。

ときどき、有名不等式(相加平均・相乗平均の関係など)を使って解くこともあります。

(4) ◆絶対値を含む関数の扱い

絶対値を含む関数では、必ず場合分けをして絶対値を取ります。絶対値が付いたままでは、微分も積分もできません。

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

○解答・解説

(1)

【方針】

(1-1) ベクトルが成分表示されているので、原則に従い内積を計算します。

(1-2) 内積の定義式を利用して$\cos\angle\mathrm{AOB}$の値を求めます。

(1-3) 原則に従って、△OABの面積を求めます。それに必要な、ベクトルの大きさや内積は、(1-1)(1-2)で計算済みです。

【解説】

(1-1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 2,\ 3),\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (2,\ -1,\ 4)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = \underline{12}$$

(1-2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14, \quad \therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \sqrt{14}$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 = 2^2 + (-1)^2 + 4^2 = 21, \quad \therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \sqrt{21}$$

$$\cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|} = \frac{12}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = \frac{12}{7\sqrt{6}} = \underline{\frac{2\sqrt{6}}{7}}$$

(1-3) △OABの面積をSとおくと

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{14 \cdot 21 - 12^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6(7^2 - 12 \cdot 2)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6\cdot 25} = \underline{\frac{5\sqrt{6}}{2}}$$

(2)

【方針】

二項定理を使って、$\left(2x^3 - \frac{1}{3x}\right)^9$ の一般項を整数 k を使って表します。

$\frac{1}{x} = x^{-1}$ となるときの k の値が求まると、係数も計算できます。

【解説】

二項定理より、$\left(2x^3 - \frac{1}{3x}\right)^9$ の一般項は

$$\begin{aligned} {}_9C_k(2x^3)^k\left(-\frac{1}{3x}\right)^{9-k} &= {}_9C_k 2^k x^{3k}(-1)^{9-k}\left(\frac{1}{3}\right)^{9-k} x^{-9+k} \\ &= {}_9C_k 2^k (-1)^{9-k}\left(\frac{1}{3}\right)^{9-k} x^{4k-9} \quad (k = 0,1,2,\cdots 9) \end{aligned}$$

$\frac{1}{x} = x^{-1}$ の項は、$4k - 9 = -1$ のときで、このとき $k = 2$

よって、係数は

$${}_9C_2 2^2 (-1)^{9-2}\left(\frac{1}{3}\right)^{9-2} = -\frac{9\cdot 8\cdot 4}{2\cdot 3^7} = \underline{-\frac{16}{243}}$$

(2)

【方針】

関数の最小値を求めるには、微分して増減表を書いて求めるのが基本です。しかし、この問題では、相加平均・相乗平均の関係を使って最小値を求めることができます。まずは、分子の次数を分母の次数より小さくなるように式変形します。

【解説】

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4 + 5x^2 + 11}{x^2 + 2} \\ &= \frac{x^2(x^2+2) + 3(x^2+2) + 5}{x^2+2} \\ &= x^2 + 3 + \frac{5}{x^2+2} \\ &= x^2 + 2 + \frac{5}{x^2+2} + 1 \end{aligned}$$

ここで、$x^2+2>0,\quad \dfrac{5}{x^2+2}>0$ より相加平均・相乗平均の関係から

$$x^2+2+\frac{5}{x^2+2} \geqq 2\sqrt{(x^2+2)\cdot\frac{5}{x^2+5}}=2\sqrt{5}$$

相加平均・相乗平均の関係

$a>0, b>0$ のとき

$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ (等号成立は$a=b$ のとき)

よって

$$f(x) \geqq 2\sqrt{5}+1$$

等号成立は、$x^2+2=\dfrac{5}{x^2+2}$ のときで

$$(x^2+2)^2=5$$

$$x^2+2=\sqrt{5}\ (\because x^2+2>0)$$

$$x^2=-2+\sqrt{5}$$

$$x=\pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}$$

よって

$x=\pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}$ のとき、最小値 $1+2\sqrt{5}$ をとる。

[別解]

【方針】

微分して増減表を書いて、増減表から最小値を求めます。いきなり微分するまえに分子の次数を分母の次数より下げてから微分すると、計算が軽減できます。

【解説】

$$f(x)=\frac{x^4+5x^2+11}{x^2+2}=x^2+3+\frac{5}{x^2+2}$$

$$\begin{aligned}f'(x)&=2x+\frac{-5\cdot 2x}{(x^2+2)^2}\\&=2x\left\{1-\frac{5}{(x^2+2)^2}\right\}=\frac{2x\{(x^2+2)^2-5\}}{(x^2+2)^2}\\&=\frac{2x\left(x^2+2+\sqrt{5}\right)\left(x^2+2-\sqrt{5}\right)}{(x^2+2)^2}\end{aligned}$$

$$f(0)=3+\frac{5}{2}=\frac{11}{2}$$

$$f\left(\pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}\right) = -2+\sqrt{5}+3+\frac{5}{-2+\sqrt{5}+2} = 1+2\sqrt{5}$$

x	$\cdots$	$-\sqrt{-2+\sqrt{5}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{-2+\sqrt{5}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$1+2\sqrt{5}$	↗	$\frac{11}{2}$	↘	$1+2\sqrt{5}$	↗

増減表より

$x=\pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}$ のとき、最小値 $\underline{1+2\sqrt{5}}$ をとる。

(4)

【方針】

曲線 $y=\sqrt{2+|4x-2x^2|}$ のグラフを書いて考えます。そのために場合分けをして絶対値をはずします。

この曲線のグラフと直線$y=m(x+3)$ のグラフとの交点が 4 個となるような m の範囲をグラフから読み取ります。

【解説】

$y=\sqrt{2+|4x-2x^2|}$ において、場合分けをして絶対値をはずします。

ｉ）$4x-2x^2=2x(2-x)\geqq 0$ のとき、つまり$0\leqq x\leqq 2$のとき

$$y=\sqrt{2+4x-2x^2}=\sqrt{-2(x-1)^2+4}$$

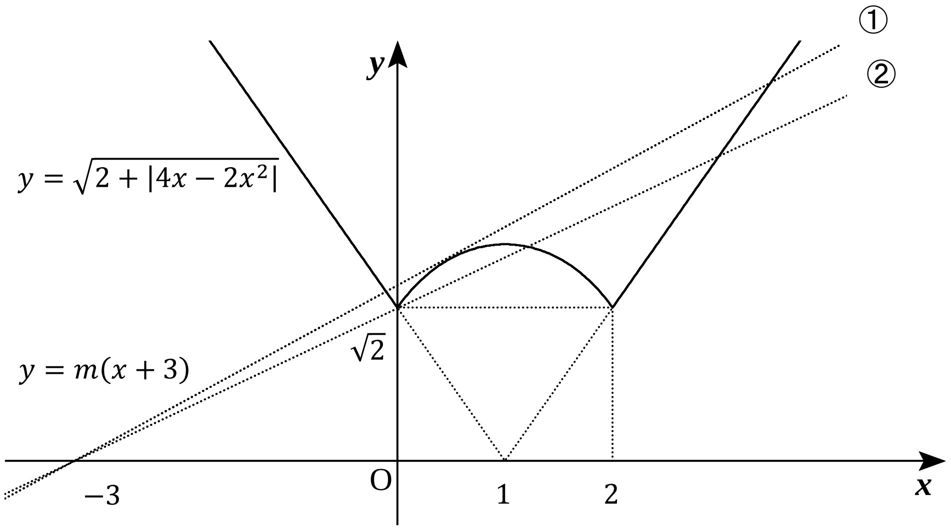
$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(-4x+4)}{\sqrt{2+4x-2x^2}}=\frac{-2(x-1)}{\sqrt{2+4x-2x^2}}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	$\sqrt{2}$	↗	2	↘	$\sqrt{2}$

ⅱ）$4x-2x^2=2x(2-x)<0$ のとき、つまり$x<0,\ x>2$ のとき

$$y=\sqrt{2-4x+2x^2}=\sqrt{2(x-1)^2}=\sqrt{2}|x-1|$$

グラフから曲線$y=\sqrt{2+|4x-x^2|}$ と直線$y=m(x+3)$ が 4 個交点を持つのは、$y=m(x+3)$ の傾きが②より大きく、①より小さいときです。



①のときの m の値を求めます。

つまり $0 \leqq x \leqq 2$ のときの曲線と直線が接するときです。

$$\sqrt{2+4x-2x^2}=m(x+3)$$

の両辺を 2 乗して

$$2+4x-2x^2=m^2(x+3)^2$$

$$2+4x-2x^2=m^2(x^2+6x+9)$$

$$(m^2+2)x^2+2(3m^2-2)x+9m^2-2=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とおくと

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(3m^2-2)^2-(m^2+2)(9m^2-2)\\&=9m^4-12m^2+4-(9m^4+16m^2-4)\\&=-28m^2+8\end{aligned}$$

接することから、$D=0$ なので

$$m^2=\frac{2}{7}$$

$$m>0 \text{ より、} m=\sqrt{\frac{2}{7}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$$

次に、②のときの m の値を求めます。このときの傾き m は、点 $\left(0,\ \sqrt{2}\right)$ を通ることから

$$m=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

よって

$$\underline{\frac{\sqrt{2}}{3}<m<\frac{\sqrt{14}}{7}}$$

④微積分

○原則

(1) ◆置換積分

方法Ⅰ) $x = g(t)$ とおく。

$$\int f(x)dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}dt = \int f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

方法Ⅱ) $g(x) = t$ とおく。

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(t)\frac{dt}{dx}dx = \int f(t)dt$$

◆区分求積法

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

とくに、$a = 0$, $b = 1$のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

(2) ◆関数の極限

$\lim_{x\to a} g(x) = 0$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ のとき

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \times \alpha = 0$$

◆三角関数の極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

○解答・解説

(1)

【方針】

(1-1) 置換積分です。 $x = \tan\theta$ とおきます。

$\dfrac{1}{1+x^2}$ から， $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$ をイメージしましょう。

(1-2) 区分求積法で求めます。数列の和，$n \to \infty$ であることから，区分求積を疑います。和をシグマで表して，$\dfrac{1}{n}$ が前に出ることを意識して式変形します。

【解説】

(1-1)

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ を置換積分で計算します。

$x = \tan\theta$ とおきます。このとき、 $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1d\theta \\ &= [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \underline{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

(1-2) 数列の和をシグマで表すと

$$\begin{aligned}\frac{n+3\cdot1}{n^2+1^2}+\frac{n+3\cdot2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n+3\cdot n}{n^2+n^2} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{n+3k}{n^2+k^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2}\cdot\frac{1+3\left(\frac{k}{n}\right)}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+3\left(\frac{k}{n}\right)}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\end{aligned}$$

よって

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+3\left(\frac{k}{n}\right)}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1+3x}{1+x^2}dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{3x}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left[\frac{3}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1$$

$$=\underline{\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\log 2}$$

(2)

【方針】

$x\to\pi$ のとき$\left(\text{分母}\right)\to 0$ なので、極限が存在するには、$\left(\text{分子}\right)\to 0$ が必要です。このことを利用して、b を消去します。また、無理関数を含む不定形は有理化し、三角関数の極限は、原則の公式が使えるように式変形していきます。

【解説】

$x\to\pi$ のとき$(x-\pi)^2\to 0$ なので、$\dfrac{\sqrt{a+\cos x}-b}{(x-\pi)^2}$ が $\dfrac{1}{8}$ に収束するには、

$$\lim_{x\to\pi}\left(\sqrt{a+\cos x}-b\right)=0$$

が必要です。従って

$$\sqrt{a-1}-b=0$$

$$b=\sqrt{a-1}$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{a+\cos x}-b}{(x-\pi)^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{a+\cos x}-\sqrt{a-1}}{(x-\pi)^2}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\left(\sqrt{a+\cos x}-\sqrt{a-1}\right)}{(x-\pi)^2}\cdot\frac{\left(\sqrt{a+\cos x}+\sqrt{a-1}\right)}{\left(\sqrt{a+\cos x}+\sqrt{a-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{(x-\pi)^2\left(\sqrt{a+\cos x}+\sqrt{a-1}\right)}=L$$

ここで

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{(x-\pi)^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos^2 x}{(x-\pi)^2(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{(x-\pi)^2(1-\cos x)}$$

（ $\theta=x-\pi$ おくと）

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を利用する為に、

分母分子に $(1-\cos x)$ をかけて$\sin x$ が現れるようにし、また

$\theta=x-\pi$ として $\theta\to 0$ の形を作ります。

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin^2(\theta + \pi)}{\theta^2\{1 - \cos(\theta + \pi)\}}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos\theta} = \frac{1}{2}$$

よって

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a-1}} = \frac{1}{8}$$

$$\sqrt{a-1} = 2$$

$$a = 5$$

このとき、$b = \sqrt{5-1} = 2$　　従って、$\underline{a = 5,\ b = 2}$