

Q.(標準問題精講数学 1A P153 例題 67)

解説の補助をお願いします。

A.

場合の数は条件に当てはまるものを漏れなく、また重複なく数え上げることが重要です。そのときに「何が区別できて、何が同じと見なせるか」注意しながら考えましょう。

部屋割り問題では、条件のついている人について優先的に考えます。この問題では女子の人数について条件が与えられていますから、

(a)まず各部屋の女子が入る人数(女子枠)を決めます。すると各部屋の男子の人数(男子枠)は自動的に確定します。

(b)次に、先に決めた女子枠に従って女子をどの部屋に入れるか決めます。

(c)最後に男子枠にそれぞれ誰を入れるか決めます。

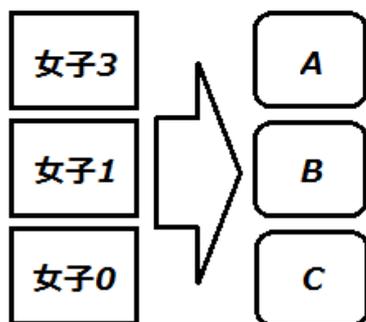
※(b)(c)では各部屋は区別することに気をつけましょう。

例)女子をそれぞれ f_1, f_2, f_3, f_4 と番号を振ります(female の f)。また部屋にも A, B, C と記号を振ります。

A 部屋に f_1, f_2 が、B 部屋に f_3, f_4 が入る場合と、

A 部屋に f_3, f_4 が、B 部屋に f_1, f_2 が入る場合は違うものとして区別することになります。

(1)



(a)女子だけの部屋を作るということは各部屋の女子枠は $3, 1, 0$ となります。この枠をどの部屋に割り当てるかは「 $3, 1, 0$ という枠数を A, B, C の順に並べる」と考えると $3! = 6$ 通りです。これで各部屋の女子枠、男子枠が確定しました。

(b)次は女子をどの部屋に誰を入れるか考えます。女子 3 人部屋→女子 1 人部屋の順に考えます。女子枠 3 の部屋は女子 4 人のうちから 3 人を選べば良いので $4C_3 = 4$ 通りです。ここで、3 人部屋に入る女子を決めると女子枠 1 の部屋に入

る女子も自動的に確定することに気をつけてください。

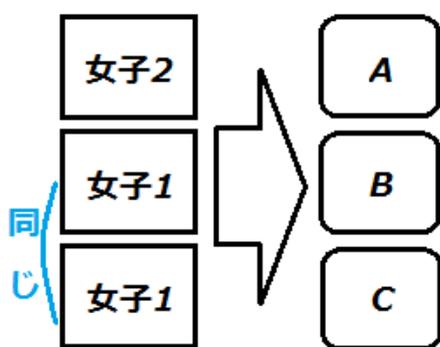
※女子 1 人部屋→女子 3 人部屋の順で考えても同じです。女子 4 人から女子 1 人部屋に入る人を選ぶのは $4C1=4$ 通りで、この時点で女子 3 人部屋に入る人たちも自動的に確定します。

(c)残りは男子枠です。男子 3 人部屋→男子 2 人部屋の順で考えます。まず男子 3 人部屋は男子 5 人から 3 人を選べばよいので $5C3=10$ 通り。残った男子 2 人は自動的に空いている男子 2 人部屋(女子が 1 人いる部屋)に確定するので、これで部屋割りが完了しました。

※ここも男子 2 人部屋→男子 3 人部屋の順に考えても同じです。(2)以降はこの説明を省きます。

以上より、求める場合の数は $6 \times 4 \times 10 = 240$ 通り

(2)



(a)少なくとも各部屋に女子が 1 人以上入るときの子枠は 2,1,1 です。これをどの枠に割り当てるかは、「2,1,1 という数字を A,B,C の順に並べる」と考えると、1,1 という枠はこの時点では区別しないので重複に注意して $3!/2!=3$ 通りです。各部屋の女子枠、男子枠が確定しました。

(b)次は女子をどの部屋に入れるか考えます。女子 2 人部屋→2 つの女子 1 人部屋の順に考えます。女子枠 2 の部屋は女子 4 人のうちから 2 人を選べば良いので $4C2=6$ 通りです(ここでは部屋は区別ができる状態ですから $4C2/2!$ としてはいけません)。

次に女子 1 人部屋が 2 つありますが、この時点では部屋を区別しているため女子 2 人のうちどちらがどちらの部屋に入るか選べばよいので、2 通りです。

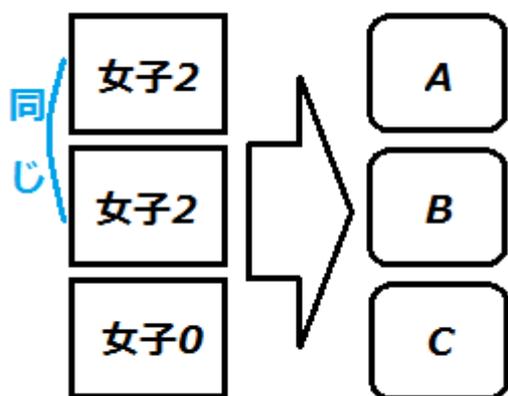
(c)残りは男子枠です。まず男子1人部屋に入る人は、男子5人から1人を選べばよいので $5C1=5$ 通り。残った男子4人は2人ずつに分かれて2つの部屋に入りますが、これも先ほどの女子の部屋割りと同様に**各部屋は区別できる**ことに注意してください。男子4人のうち2人を選ぶと、残る2人は空いている部屋に入ることが自動的に決定するので $4C2=6$ 通りです。

以上から、求める場合の数は $3 \times 6 \times 2 \times 5 \times 6 = 1080$ 通り

【別解】「少なくとも」という文言から**余事象**を考えます。つまり女子がいない部屋がある場合の数を求めます。

女子がいない部屋があるときの各部屋の女子枠は $3,1,0$ と $2,2,0$ の2つです。これはそれぞれ(1)と(3)のときにあたります。全事象は $9C3 \times 6C3 \times 3C3 = 1680$ 通りなので、先に(3)を解いてから全事象から(1)と(3)を引く方法があります。(3)の解説の後に説明します。

(3)



(a)女子が2人の部屋を2つ作るということは各部屋の女子枠は $2,2,0$ となります。この枠をどの部屋に割り当てるかは「 $2,2,0$ という枠数を A,B,C の順に並べる」と考えると、(2)と同じく**重複**に注意して $3!/2!=3$ 通りです。各部屋の女子枠、男子枠が確定しました。

(b)次は女子をどの部屋に入れるか考えます。女子1人部屋が2つありますが、この時点では**部屋を区別している**ので女子4人のうち2人を選ぶと、残る2人は空いている部屋に入ることが自動的に決定するので $4C2=6$ 通りです。

(c)残りは男子枠です。まず男子3人部屋に入る人は、男子5人から3人を選べ

ばよいので $5C3=10$ 通り。残った男子 2 人のうち 1 人ずつに分かれて 2 つの部屋に入ります。部屋は区別されているのでどちらがどちらの部屋に入るかは 2 通りです。

以上より求める場合の数は $3 \times 6 \times 10 \times 2 = 360$ 通り

※ (1) と (3) の結果から (2) の【別解】を求めると、(全事象) - $\{(1)+(3)\} = 1680 - (240+360) = 1080$ となって(2)と同じ解が得られました。

以上のように、(a)まず各部屋の女子枠、男子枠を設定する際には「同じ枠数は区別がつかない」ので重複を考えますが、(b)(c)枠数を設定した後は枠数が同じでも部屋が違うので区別できる状態にあることに注意しましょう。