

数学III 基礎問題精講 解説

P48 | 必修基礎問29

・複素数 z と、ある点 p の距離は、 $|z-p|$

ある複素数平面上の点 z と原点の距離は、 $|z|$ と表現します。これは、 $z=a+bi$ のとき、

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

と定義されています。

<補足>

.....
複素数には長さという概念がありませんが、人間が「こう定義すると便利だから」ということで、複素数平面からの原点からの距離を長さとして定義しました。
.....

では、 $|z-p|$ は何を意味しているのでしょうか？（点 P は複素数平面上の点）それは、

複素数平面上における、点 z と点 p の距離

です。本当にそうなっているかを確認してみましょう。そのためには、

ステップ①「複素数平面上の z と p の距離を測ってみる」

ステップ②「 $|z-p|$ を定義通りに計算してみる」

ステップ③「①と②が同じになることを確認する」

というステップを踏みます。わかりやすいように、 $z=3+5i$ 、 $p=1+2i$ を例にとりましょう。

・ステップ①「複素数平面上の z と p の距離を測ってみる」

$z=3+5i$ 、 $p=1+2i$ は、複素数平面上にとり、この2つの点の距離を求めると、ピタゴラスの定理から $\sqrt{13}$ になることはわかるかと思います。

・ステップ②「 $|z-p|$ を定義通りに計算してみる」

今度は、 $|z-p|$ を定義通りに計算してみましょう。

$$z-p = (3+5i) - (1+2i) = 2+3i$$

なので、

$$|z-p| = |2+3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

となります。これでステップ③「①と②が同じになることを確認する」確認できましたね。

以上が、 $|z-p|$ は複素数平面上の点 z と点 p の距離を意味していることの説明です。
理屈ではわかったと思いますが、これからは理屈はすっ飛ばして、

$|z-p|$ は、複素数平面上における点 z と点 p の距離である

ということが、イコールで繋がるようにしてください。

ということは、 $|z-(1+i)|=1$ は、 z と $1+i$ の距離が常に1である、ということなので、 z は $1+i$ を中心とした円上に存在するということです。

また、 $|z-2|$ は z と 2 の距離のことなので、解答のグラフのようになるのです。わかりましたでしょうか？

「基礎問34」も同じように考える問題なので、そちらで理解度を試してみましよう。