Q.(標準問題精講数学 2B P46 例題 18)
解説の補助をお願いします。

A.
不等式の証明は**大きい辺から小さい辺を引いて 0 以上(または正)を示す**のが最もオーソドックスな解法です。その際に**正の数の積や、2 乗の形を作る**のがポイントです。本問もこれに従って解いていきます。
(1)
(右辺)-(左辺)≧0 となることを示します。与えられた条件を適宜用いながら正の数の積や 2 乗の形に変形していきます。

$(\text{右辺})-(\text{左辺})=pf(x_1)+qf(x_2)-f(px_1+qx_2)$
$f(x)=x^2$を代入します。
$=p(x_1)^2+q(x_2)^2-(px_1+qx_2)^2$
$=px_1^2+qx_2^2-(p^2x_1^2+2pqx_1x_2+q^2x_2^2)$
$=px_1^2+qx_2^2-p^2x_1^2-2pqx_1x_2-q^2x_2^2$
$p+q=1$の条件を用いることを目標に変形します。
$=p(1-p)x_1^2+q(1-q)x_2^2-2pqx_1x_2$
$=pqx_1^2+pqx_2^2-2pqx_1x_2 \qquad (\because p+q=1)$
共通項$pq$でまとめます。
$=pq(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)$
$=pq(x_1-x_2)^2$
$pq$は正の数であり、$(x_1-x_2)^2$は 2 乗なので 0 以上です。よって
$pq(x_1-x_2)^2 \geqq 0$

以上より
$f(px_1+qx_2) \leqq pf(x_1)+qf(x_2)$ 　　(証明終わり)

(2)
a,b には(1)の p,q と同じ条件が与えられているので、**(1)の不等式を利用すればよい**ことが分かります。また不等式の左辺第 1 項は$f(x)$に$x=a+\frac{1}{a}$、第 2 項は$f(x)$に$x=b+\frac{1}{b}$を代入したものとみれば(1)が利用できそうです。ただし(1)の右辺と比較すると$\boldsymbol{p+q=1}$**という条件を満たさなければなりません**。そこで

$p=\frac{1}{2},q=\frac{1}{2}$とし、全体を2倍すればよいでしょう。つまり

$$(\text{左辺})=2\left\{\frac{1}{2}f\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}f\left(b+\frac{1}{b}\right)\right\}$$

ここで(1)の不等式を利用します。

$$\geqq 2\left\{f\left(\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\right)\right\}$$

$$=2\left\{\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\right\}^2$$

$$=\frac{2}{2^2}\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\right\}^2 \quad \leftarrow \frac{1}{2}\text{を}\{\ \ \}\text{の外に出しました。}$$

$$=\frac{1}{2}\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 \quad —(*) \leftarrow a+b=1\text{を用いました。}$$

ここで(2)の不等式と比較すると、これが$\geqq\frac{25}{2}$となれば良さそうです。そうなるためには、

$\boldsymbol{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqq 4}$**を示す必要があります。**$a+b=1$の条件を使いながら

変形していきます。

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$を通分すると

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{ab}$$

$a,b>0$なので、$\frac{1}{ab}\geqq 4$を示すということは$ab\leqq\frac{1}{4}$を示すことになります。

ここで**相加平均・相乗平均を思い出しましょう。**

なぜなら、相加平均・相乗平均の関係は

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab} \qquad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>0)$$

**等号成立は$\boldsymbol{a=b}$のとき**

です。この式を使えば例えば$ab$の値が既知ならば$a+b$の最小値が、

$a+b$の値が既知ならば$ab$の最大値が分かるからです。
ただしいずれにしても**等号成立を必ず確認しましょう。**成り立たなければ等号が成り立たないということなので、最大値・最小値ではなくなるからです。
$a>0, b>0$なので相加平均・相乗平均より

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}$$

$$\Leftrightarrow ab \leqq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{4} \qquad (\because a+b=1)$$

また等号成立は$a=b$のときです。$a+b=1$と合わせると$a=b=\frac{1}{2}$のときです。

よって$ab \leqq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{ab} \geqq 4$
これより、

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 \geqq \frac{1}{2}(1+4)^2 = \frac{25}{2} \qquad \left(\text{等号成立は} a=b=\frac{1}{2} \text{のとき}\right)$$

以上より

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqq \frac{25}{2}$$

(証明終わり)

この問題の本筋とは少し離れますが、**正の数の和や積について最大値や最小値を知りたい場合は相加平均・相乗平均が使えることもあります。**これを使うと他の方法よりも比較的楽に示せるので頭に入れておきましょう。