

数学III 基礎問題精講 解説

P123 | 演習問題68

ポイント

- ① 平均値の定理に、どんな $f(x)$ を入れるかを見極めるのが第一歩
- ② 「平均値の定理を使って、不等式を証明する」問題は、 $a < c < b$ を使うことが多い
- ③ 最終的に導出したい式にするために無理やり変形することが、証明問題の鉄則

解説

(1)の正答率は97.2%あったので、(2)から解説していきます。

「平均値の定理を用いて」とあるので、とにかくにも代入してみましょう。平均値の定理は、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

ですので、あとは $f(x)$ に何を入れるかを見極めるだけです（ポイント①）。

(1)が誘導問題っぽかったことと、不等式に、

$$e^\beta \sin \beta - e^\alpha \sin \alpha$$

という式があるので、

(これが $f(b) - f(a)$ に当たる部分なんだろうなあ)

と予想するわけです。では実際に、平均値の定理に $f(x) = e^x \sin x$ を代入してみましょう。

$f(x)$ は $\alpha \leq x \leq \beta$ において連続で、 $\alpha < x < \beta$ で微分可能なので、平均値の定理から

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\gamma) \quad , \quad \alpha < \gamma < \beta$$

を満たす γ が少なくとも一つ存在します。よって、

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\gamma)$$

⇔

$$\frac{e^\beta \sin \beta - e^\alpha \sin \alpha}{\beta - \alpha} = e^\gamma (\sin \gamma + \cos \gamma)$$

となります。さて、ここで、最終的に導出したい式と見比べてみましょう（ポイント③）。

$$|e^\beta \sin \beta - e^\alpha \sin \alpha| < \sqrt{2}(\beta - \alpha)e^\beta$$

対応させてみると、次のように変形しないといけないことがわかります。

- ① $e^\beta \sin \beta - e^\alpha \sin \alpha$ を、 $|e^\beta \sin \beta - e^\alpha \sin \alpha|$ にする
- ② e^γ を e^β にする
- ③ $\sin \gamma + \cos \gamma$ を $\sqrt{2}$ にする

順々に考えていきましょう。

まず、①については、両辺に絶対値をつければ良いですね。

$$\left| \frac{e^\beta \sin \beta - e^\alpha \sin \alpha}{\beta - \alpha} \right| = |e^\gamma (\sin \gamma + \cos \gamma)|$$

両辺に $|\beta - \alpha|$ をかけて、

$$|e^\beta \sin \beta - e^\alpha \sin \alpha| = |\beta - \alpha| \cdot |e^\gamma (\sin \gamma + \cos \gamma)|$$

$\beta > \alpha$ なので、 $|\beta - \alpha|$ の絶対値をとって $(\beta - \alpha)$ にすることができます。よって、

$$|e^\beta \sin \beta - e^\alpha \sin \alpha| = (\beta - \alpha) \cdot |e^\gamma (\sin \gamma + \cos \gamma)|$$

これで①は終了しましたね。

続いて②について。ここでは「ポイント②」が登場です。

「平均値の定理」を用いて不等式の証明をする場合は、 $\alpha < \gamma < \beta$ の不等式を利用することが多々あります。

今回の場合も、 e^x は単調増加する関数なので、

$$\gamma < \beta \Leftrightarrow e^\gamma < e^\beta$$

となります。よって、

$$|e^\beta \sin \beta - e^\alpha \sin \alpha| = (\beta - \alpha) \cdot |e^\gamma (\sin \gamma + \cos \gamma)|$$

\Rightarrow

$$|e^\beta \sin \beta - e^\alpha \sin \alpha| < (\beta - \alpha) \cdot |e^\beta (\sin \gamma + \cos \gamma)|$$

となります。また、常に e^β は正ですので、絶対値を外して

$$|e^\beta \sin \beta - e^\alpha \sin \alpha| < (\beta - \alpha) e^\beta |\sin \gamma + \cos \gamma|$$

となります。

これで、②も終わりました。とうとう最後の③です。

・・・と言っても、これも難しくありません。

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

となることが見抜ければほぼ終わり。

$$|\sin \theta + \cos \theta| = \left| \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \sqrt{2} \left| \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2} \quad \text{※sinは-1~1の間になるので } \left| \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq 1$$

ということから、

$$|e^\beta \sin \beta - e^\alpha \sin \alpha| < \sqrt{2} (\beta - \alpha) e^\beta$$

となるのです。解答の流れ、わかりましたか？