Q.（標準問題精講数学ⅠA P74 例題 31）
解説の補助をお願いします。

A,
【方針】
整数を扱う問題では、通常の不等式にはない特殊な条件(素数である、ある数の倍数・約数であるなど)がつくので解はかなり制限されます。そこで**条件から解となりうる範囲を絞っていく**ことが基本的なアプローチの仕方です。
ガウス記号はある実数 a があって、a を超えない最大の整数、つまり a の整数部分を表しており、[a]≦a<[a+1]となります(ガウス記号を見たら即座にこの不等式を思い出せるようにしておきましょう)。どうやら**ガウス記号の性質を用いて解の範囲が絞れそうです**。
最終的には n についての範囲が欲しいですが、今分かるのは$[\sqrt{n}]$が n の約数となるということなので、はじめに$[\sqrt{n}]$が条件を満たすような範囲を求めてから n についての範囲を求めていきます。

【解説】
まずはガウス記号の性質から$[\sqrt{n}]$の範囲を絞りましょう。
$\sqrt{n}$について
$[\sqrt{n}] \leqq \sqrt{n} < [\sqrt{n}+1]$となります。また$\sqrt{n}-1$についても同様に
$[\sqrt{n}-1] \leqq \sqrt{n}-1 < [\sqrt{n}]$となるので、これら 2 つから

$\sqrt{n}-1 < [\sqrt{n}] \leqq \sqrt{n}$となります。
$[\sqrt{n}]$は整数であることを分かりやすくするために、$[\sqrt{n}] = \mathrm{N}$(整数)と置いておきましょう。
$\sqrt{n}-1 < N \leqq \sqrt{n}$
ここから n についての不等式に変形していきます。
各辺とも 0 以上なので、2 乗しても大小関係は変わりません。第 1 辺と第 2 辺について変形すると
$\sqrt{n}-1 < N \iff \sqrt{n} < N+1 \iff n < (N+1)^2$となります。
同様に第 2 辺と第 3 辺も
$N \leqq \sqrt{n} \iff N^2 \leqq n$
これら 2 つより、n について
$N^2 \leqq n < (N+1)^2$と範囲が絞れました。
このうち、$[\sqrt{n}](=N)$が n の約数になるものをさらに絞っていきます。

$\mathbf{[\sqrt{n}](=N)}$**が n の約数になる⇔n が**$\mathbf{[\sqrt{n}](=N)}$**の倍数になる**ということなので、N の倍数になっている n を見つけ出します。

$N^2 \leqq n < (N+1)^2$を満たす n を全て書き出すと、n、N は整数なので

$N^2 \leqq n \leqq (N+1)^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad N^2 \leqq n \leqq N^2 + 2N$となります。したがって

$n = N^2, N^2+1, N^2+2, \dots, N^2+(N-1), N^2+N, N^2+(N+1), \dots, N^2+(2N-1), N^2+2N$

このうち N の倍数であるもの(つまり **N でくくれるもの**)は

$\mathbf{n = N^2, N^2+N, N^2+2N}$の 3 つです。

1 つの N に対して 3 つの n が条件を満たすことになります。あとは N の取りうる範囲が分かれば、条件を満たす n の個数を求められます。

$N = [\sqrt{n}]$で 1≦n≦10000 だったので

$1 \leqq N \leqq 100$

となって、N は 100 個の値を取りえます。

ここで$n = N^2 + N$や$N^2 + 2N$が 10000 をオーバーするかもしれないので確認しておきましょう。

最も 10000 をオーバーする可能性があるのは N=100 のときです。このとき、

$N^2 + N = 10000 + 100 = 10100$　よって不適です。

$N^2 + 2N = 10000 + 200 = 10200$　よって不適です。

これより N=100 のとき、条件を満たす n はN^2だけだということが分かります。

次に 10000 をオーバーする可能性があるのは N=99 のときです。このとき、

$N^2 + N = 9801 + 99 = 9900$　よって適です。

$N^2 + 2N = 9801 + 198 = 9999$　よって適です。

N=99 のときに$N^2 + 2N$が 10000 以下であったので、N≦99 のときはN^2, N^2+N, N^2+2Nが全て 10000 以下となるのが分かります。

以上より 1≦N≦99 のとき、1 つの N に対して 3 つの n の値(N^2, N^2+N, N^2+2N)が当てはまり、N=100 のときは$n = N^2$の 1 つが当てはまるので、条件を満たす n の個数は　3×99+1=298(個)