聖マ 2015 物理

配点　合計 100 点

1　一問 1 点×20 問　　計 20 点

2　〔1〕～〔4〕3 点×4 問　〔5〕〔6〕4 点×2 問　　計 20 点

3　〔1〕～〔3〕3 点×3 問　〔4〕4 点　〔5〕6 点　　計 19 点

4　一問 3 点×5 問　　計 15 点

5　〔1〕～〔6〕3 点×6 問　〔7〕〔8〕4 点×2 問　　計 26 点

1

原則１．クーロン力とローレンツ力　　→　〔1〕に利用

距離 r [m] 離れた 2 つの点電荷の電荷が q [C] と Q [C] であるとき、点電荷の間には次式で表されるクーロン力 F [N] が働く。

$$F = k\frac{qQ}{r^2}$$

なお、上式中の k は比例定数で、真空中（空気中）の値は $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \times 10^9\ [\mathrm{N \cdot m^2/C^2}]$ である。また、電荷 q [C] をもつ粒子が電場 E [N/C] の中にあるとき、この粒子が電場から受けるクーロン力 F [N] は、次式で表される。

$$F = qE$$

一方、電荷 q [C] をもつ粒子が速さ v [m/s] で磁場 B [T] の中を運動するとき、この粒子が磁場から受けるローレンツ力 F [N] は、次式で表される。

$$F = qvB\sin\theta$$

ここで、θ は粒子速度の向きと磁場の向きがなす角度である。

原則２．力学的エネルギー保存の法則　　→　〔2〕に利用

質量 m の物体が速さ v で高さ h の所を運動しているとき、空気抵抗などの影響が無視できるなら、速さ v や高さ h が変化しても、運動エネルギー（ $\frac{1}{2}mv^2$ ）と位置エネルギー（ mgh ）の和である力学的エネルギー（ $\frac{1}{2}mv^2 + mgh$ ）は変化しない（ここで、g は重力加速度（$g = 9.8\ [\mathrm{m/s^2}]$ ）である）。これを力学的エネルギー保存の法則と言う。

例えば、鉛直方向に運動する質量 m の物体において、高さ h_1 のときの速さを v_1、高さ h_2 のときの速さを v_2 とすると、次式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}m{v_2}^2 + mgh_2 \quad \cdots\cdots①$$

ただし、人工衛星のように地表から極めて高いところを運動する質量 m の物体の位置エネルギーは、$-G\frac{Mm}{r}$（G：万有引力定数（ $G = 6.67 \times 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}]$ ）、M：地球の質量、r：地球の中心からの距離）と表す必要があり、式①の代わりに次式を用いる。

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 - G\frac{Mm}{r_1} = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - G\frac{Mm}{r_2} \quad \cdots\cdots②$$

また、ばねを含む系においては、①式にばねの弾性エネルギー $\frac{1}{2}k{x_1}^2$ 、$\frac{1}{2}k{x_2}^2$（ただし、k：ばね定数、x_1・x_2：ばねの自然長からの変位）を含めた次式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 + mgh_1 + \frac{1}{2}k{x_1}^2 = \frac{1}{2}m{v_2}^2 + mgh_2 + \frac{1}{2}k{x_2}^2 \quad \cdots\cdots③$$

原則３．はねかえり係数　　→　〔2〕に利用

速度 v [m/s] の物体が壁や床のような動かない物体に衝突し、速度 v' [m/s] ではねかえるとき、はねかえり係数 $e\ (0 \leqq e \leqq 1)$ は、次式で定義される。

$$e = -\frac{v'}{v}$$

なお、$e = 1$ となる衝突のことを完全弾性衝突と言い、$e = 0$ となる衝突のことを完全非弾性衝突と言う。

原則４．運動の方程式と重力　　　　→　〔2〕に利用

一般に、質量 m の物体に力 F が加わるとき、次式のように、物体は加速度 a の等加速度運動をする。

$$ma = F$$

なお、質量 m の物体が速さ v （角振動数 ω ）、半径 r の円運動をするとき、その運動方程式は次式で表される。

$$m\frac{v^2}{r} = F \quad （ mr\omega^2 = F ）$$

なお、円運動の周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v}$$

となる。

また、一般に質量 m の物体には鉛直下向きに大きさ mg（ g は重力加速度）の重力がはたらく。よって、例えば、鉛直下向きに重力以外の力 F が加わっている物体の運動方程式は、次式のようになる。

$$ma = mg + F$$

原則５．熱容量と比熱　　　　→　〔3〕に利用

質量 m [g] のある物質の温度を Δt [K] 上昇させるのに必要な熱量が Q [J] であり、熱容量が C [J/K] 、比熱が c [J/g･K] であるとき、次式が成り立つ。

$$Q = C\Delta t = mc\Delta t$$

上式からわかるように、比熱は物質の種類や状態のみで決まる定数である。

原則６．熱力学第１法則とモル比熱　　　　→　〔3〕に利用

気体に与えた熱量 Q は、気体の内部エネルギーの増加量 ΔU と、気体が外部にした仕事 W の和に等しい。すなわち、次式が成り立つ。

$$Q = \Delta U + W \quad \cdots\cdots①$$

なお、単原子分子気体の内部エネルギー U は次式で表される。ここで、n は物質量、R は気体定数、T は温度である。

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

また、気体が外部にした仕事 W は次式で表される。ここで、p は圧力、ΔV は体積の増加量である。

$$W = p\Delta V$$

ところで、単原子分子気体の定圧変化では、$W = nR\Delta T$ となるので、式①は次式のように変形できる。なお、$C_\mathrm{P} = \frac{5}{2}R$ を定圧モル比熱と言う。

$$Q = \Delta U + nR\Delta T = \frac{3}{2}nR\Delta T + nR\Delta T = \frac{5}{2}nR\Delta T = nC_\mathrm{P}\Delta T$$

また、単原子分子気体の定積変化では、$W = 0$ となるので、式①は次式のように変形できる。なお、$C_\mathrm{V} = \frac{3}{2}R$ を定積モル比熱と言う。

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T = nC_\mathrm{V}\Delta T$$

原則７．写像公式（レンズ公式）　　　→　〔4〕に利用

物体からレンズまでの距離を a 、レンズから像までの距離を b 、レンズの焦点距離を f とすると、次式で表される写像公式（レンズ公式）が成り立つ。

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

なお、凸レンズでは $f > 0$ 、凸レンズでは $f < 0$ となる。

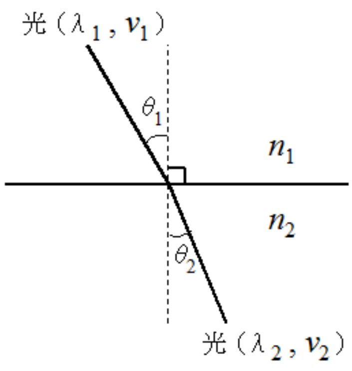
また、像の倍率（ $\frac{\text{像の大きさ}}{\text{物体の大きさ}}$ ） m は、次式により求められる。

$$m = \frac{b}{a} = \frac{b-f}{f}$$

原則８．屈折の法則　　　→　〔4〕に利用

屈折率 n_1 の媒質中および屈折率 n_2 の媒体中を光が進行する場合、その境界面で光は屈折する。このとき、境界面と垂直な面と屈折率 n_1（ n_2 ）の媒質中の光の進行経路がなす角を θ_1（ θ_2 ）、屈折率 n_1（ n_2 ）の媒質中の光の速さと波長をそれぞれ v_1（ v_2 ）と λ_1（ λ_2 ）とすると、次式で表される屈折の法則が成り立つ。

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



（図はWEB上で見つからなかったため自作）

〔1〕

【方針】

問題文より、クーロン力やローレンツ力などに関する基本的な設問であると気づく。したがって、「原則１．クーロン力とローレンツ力」の知識などを利用して順に解いてゆく。

【解説】

（①～④）

「原則１．クーロン力とローレンツ力」の知識などより、解答は、①：z 、②：evB 、③：ホール、④：eE である。

（⑤）

電子が受けるクーロン力とローレンツ力がつり合うことから、次式のようになる。

$$eE = evB \qquad \therefore B = \frac{E}{v}\ [\mathrm{T}] = \frac{E}{v}\ [\mathrm{Wb/m^2}] \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

〔2〕

【方針】

「空気抵抗は無視できるものとする」と言う文言より、空気中を運動している小球の力学的エネルギーは保存されることに気づく。この点を踏まえて、「原則２．力学的エネルギー保存の法則」や「原則３．はねかえり係数」、「原則４．運動の方程式と重力」の知識を利用して順に解いてゆく。

【解説】

（⑥・⑦）

「原則２．力学的エネルギー保存の法則」や「原則４．運動の方程式と重力」より、解答は、⑥：mgH 、⑦：mg である。

（⑧）

床に衝突する直前における小球の速さを v [m/s] とおくと、力学的エネルギー保存の法則により、

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \therefore\ v = \sqrt{2gh}\ [\mathrm{m/s}] \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる。

（⑨）

衝突直後における小球の速さを v' [m/s] とおくと、$v' = ev$ となるから、衝突直後における小球の運動エネルギーは、

$$\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m(ev)^2 = e^2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 = e^2mgh\ [\mathrm{J}] \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる。

（⑩）

衝突後に到達する最高点の高さを h' [m] とおくと、力学的エネルギー保存の法則により、

$$e^2mgh = mgh' \qquad \therefore\ h' = e^2h\ [\mathrm{m}] \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる。

〔3〕

【方針】

問題文より、熱容量、比熱、定積モル比熱、定圧モル比熱の定義式そのものを問うていることに気づく。したがって、「原則５．熱容量と比熱」や「原則６．熱力学第１法則とモル比熱」の知識を利用して順に解いてゆく。

【解説】　　　　（※ ⑮は、採点対象外となったため、省略）

「原則５．熱容量と比熱」や「原則６．熱力学第１法則とモル比熱」より、解答は、⑪：$\frac{Q}{T}$ [J/K] 、⑫：$\frac{Q}{mT}$ [J/(g・K)] 、⑬：$\frac{Q}{nT}$ [J/(mol・K)] 、⑭：$\frac{Q}{nT}$ [J/(mol・K)] である。

〔4〕

【方針】

「倒立の実像が生じた」と言う文言より、凸レンズ（⑯は「凸」）であると気づく。この点を最初の手掛かりとして、「原則７．写像公式（レンズ公式）」や「原則８．屈折の法則」の知識を利用して順に解いてゆく。

【解説】

（⑯）

倒立の実像ができることから、凸レンズである。ゆえに、解答は、⑯：凸 である。

（⑰）

物体からレンズまでの距離 a [cm] 、レンズから像までの距離 b [cm] 、レンズの焦点距離 f [cm] について、

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

が成り立つから、この式に $a = 10$ cm 、$f = 6$ cm を代入すると、

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6} \qquad \therefore\ b = 15\ \mathrm{cm}\ \cdots\cdots(答)$$

となる。

（⑱）

倍率２倍の虚像ができることから $b = -2a$ となるので、

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{-2a}=\frac{1}{6} \qquad \therefore\ a = 3\ \mathrm{cm}\ \cdots\cdots(答)$$

となる。

（⑲）

光軸上の光線はレンズを直進するから、屈折回数は０回である。ゆえに、解答は、⑲：0 である。

（⑳）

通常、光軸上以外の光線は、空気中からレンズに入るときとレンズから空気中に出るときにそれぞれ屈折するから、屈折回数は 2 回である。ただし、光線が垂直にレンズに入る場

合や垂直にレンズから出る場合には、屈折回数は 1 回となる。ゆえに、解答は、⑳：2（「1 または 2」でも可）である。

2

原則９．オームの法則と抵抗率　　　→　〔1〕～〔3〕・〔5〕・〔6〕に利用

抵抗値 R [Ω] の抵抗にかかる電圧が V [V] で、この抵抗に流れる電流が I [A] であるとき、次式で表されるオームの法則が成り立つ。

$$V = RI$$

また、断面積 S [m^2] 、長さ l [m] 、抵抗率 ρ [Ωm] の金属体等でできた抵抗の抵抗値 R [Ω] は、

$$R = \rho\frac{l}{S}\ [\Omega]$$

となる。

原則１０．合成容量の公式　　　→　〔4〕に利用

2 つの電気容量 C_1 、C_2 を並列接続したときの合成容量 C は、次式で表される。

$$C = C_1 + C_2$$

また、2 つの電気容量 C_1 、C_2 を直列接続したときの合成容量 C は、次式で表される。

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\ \rightarrow\ C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

原則１１．コンデンサーの電気量と静電エネルギー　　　→　〔4〕～〔6〕に利用

電気容量 C [F] のコンデンサーにかかる電圧が V [V] であるとき、このコンデンサーには次の 2 式で表される電気量 Q [C] および静電エネルギー U [J] が蓄えられている。

$$Q = CV\ \cdots\cdots①$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2\ \cdots\cdots②$$

式①より、式②は以下のようにも表せる。

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{2C}\ \cdots\cdots③$$

〔1〕～〔4〕

【方針】

「はじめ, コンデンサーC_1 , C_2に蓄えられている電気量はそれぞれ 0 C」と言う文言より、はじめ、コンデンサーC_1 、C_2の電位差はいずれも 0 V であることがわかる。この点を踏まえて、「原則９．オームの法則と抵抗率」や「原則１０．合成容量の公式」、「原則１１．コンデンサーの電気量と静電エネルギー」の知識を利用して順に解いてゆく。

【解説】

〔1〕
「原則９．オームの法則と抵抗率」の知識より、

$$R_0 = \rho \frac{L}{D}\ [\Omega]\ \cdots\cdots(\text{答})$$

である。
〔2〕
S_1を閉じた直後に電池 E より流れる電流を I_0 [A] とおく。
このとき、コンデンサーC_1 、C_2の電位差はいずれも 0 V であり、抵抗 R には電圧 E [V] がかかるので、

$$I_0 = \frac{E}{R}\ [\mathrm{A}]\ \cdots\cdots(\text{答})$$

となる。
一般に、コンデンサーの電位差が 0 V の場合、コンデンサーを導線とみなすことができる。
〔3〕
S_1を閉じてから十分に時間が経ったときに電池 E より流れる電流を I [A] とおく。このとき、コンデンサーC_1 、C_2の側には電流が流れないから、

$$I = \frac{E}{R_0+R}\ [\mathrm{A}]\ \cdots\cdots(\text{答})$$

となる。
〔4〕
コンデンサーC_1 、C_2からなる直列合成容量を C [F] とおくと、

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\ \rightarrow\ C = \frac{C_1 C_2}{C_1+C_2}\ [\mathrm{F}]$$

となる。また、C_1 、C_2に蓄積される電気量 Q_1 [C] 、Q_2 [C] は、C_1 、C_2の直列合成コンデンサーに蓄積される電気量に等しい。よって、ab 間の電圧を V_{ab} [V] とおくと、

$$Q_1 = Q_2 = CV_{\mathrm{ab}} = \frac{C_1 C_2}{C_1+C_2} \cdot R_0 I = \frac{C_1 C_2 R_0 E}{(C_1+C_2)(R_0+R)}\ [\mathrm{C}]\ \cdots\cdots(\text{答})$$

となる。

〔5〕・〔6〕
【方針】
問題文と図 1 より、位置 c を移動することにより、S_2を閉じたときの電流計に流れる電流の大きさや向きが変わることに気づく。この点を踏まえて、「原則９．オームの法則と抵抗率」や「原則１１．コンデンサーの電気量と静電エネルギー」の知識を利用して順に解いてゆく。
【解説】
〔5〕

図 1 より、S_2を閉じる前にC_1にかかる電圧 $\frac{Q_1}{C_1}$ [V] と ac 間の電圧 V_{ac} [V] が同じなら、S_2を閉じた状態でも電流計に電流が流れないことがわかる。すなわち、$\frac{Q_1}{C_1}$ [V] と V_{ac} [V] が等しいなら、S_2を閉じても電流が流れない。よって、このときの ac 間の長さを l_1 [m] とおくと、

$$\frac{Q_1}{C_1}=\frac{l_1}{L}R_0I \quad \rightarrow \quad \frac{C_2}{C_1+C_2}R_0I=\frac{l_1}{L}R_0I \qquad \therefore\ l_1=\frac{C_2}{C_1+C_2}L\ [\mathrm{m}]\ \cdots\cdots(\text{答})$$

となる。

〔6〕

c の位置を b の方向に移動した場合、$V_{\mathrm{ac}}<V_{\mathrm{ac}}{}'$ 、$V_{\mathrm{cb}}>V_{\mathrm{cb}}{}'$ となるので、C_1の右の極板とC_2の左の極板の電気量の合計は 0 から負になっていき、正の電気量がS_2から c の向きに電流計を流れる。この点を踏まえて、解いてゆく。

c の位置を b の方向に x [m] だけ移動した場合の ac 間、cb 間の電圧を、それぞれ $V_{\mathrm{ac}}{}'$ [V] 、$V_{\mathrm{cb}}{}'$ [V] とおくと、〔5〕の結果を用いて、次の 2 式が得られる。

$$V_{\mathrm{ac}}{}'=\frac{l_1+x}{L}R_0I=\left(\frac{C_2}{C_1+C_2}+\frac{x}{L}\right)R_0I\ [\mathrm{V}]$$

$$V_{\mathrm{cb}}{}'=\frac{L-(l_1+x)}{L}R_0I=\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}-\frac{x}{L}\right)R_0I\ [\mathrm{V}]$$

C_1 、C_2に蓄積されるそれぞれの電気量を $Q_1{}'$ [C] 、$Q_2{}'$ [C] とおくと、C_1の右の極板とC_2の左の極板に蓄積される電気量の和は、次式のようになる。

$$-Q_1{}'+Q_2{}'=-C_1V_{\mathrm{ac}}{}'+C_2V_{\mathrm{cb}}{}'=-\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}+\frac{C_1x}{L}\right)R_0I+\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}-\frac{C_2x}{L}\right)R_0I$$

$$=-\frac{(C_1+C_2)xR_0I}{L}=-\frac{(C_1+C_2)R_0xE}{(R_0+R)L}\ [\mathrm{C}]$$

c の位置を移動する前は、$-Q_1+Q_2=0$ であったから、S_2から c の向きに電流計を流れた総電気量は、

$$0-(-Q_1{}'+Q_2{}')=\frac{(C_1+C_2)R_0xE}{(R_0+R)L}\ [\mathrm{C}]\ \cdots\cdots(\text{答})$$

となる。

3

原則４．運動の方程式と重力　（前述）　　　→　〔2〕～〔5〕に利用

原則１２．単振動の運動方程式と周期など　　　→　〔5〕に利用

物体の質量を m 、変位を x 、加速度を a とおいたとき、運動方程式が

$$ma = -kx \quad (\ k\ \text{は正の定数})$$

で表されるなら、この物体は単振動をする。なお、単振動の周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

となる。また、振幅を A_0 とおくと、変位 x は

$$x = A_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \quad (\ \varphi\ \text{は初期位相}) \quad \cdots\cdots①$$

と表され、速さの最大値 V_0 と加速度の最大値 a_0 は

$$V_0 = A_0\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \cdots\cdots②$$

$$a_0 = \frac{A_0 k}{m} \quad \cdots\cdots③$$

となる。

〔1〕・〔2〕

【方針】

「この円環の円周上のみを滑らかに動ける……質点がある」と言う文言より、質点は円運動の運動方程式に従うことがわかる。この点を踏まえて、「原則４．運動の方程式と重力」の知識を利用して順に解いてゆく。

【解説】

〔1〕

求める力の大きさを N [N] とおくと、力のつり合いより、

$$N - mg = 0 \qquad \therefore\ N = mg\ [\mathrm{N}] \quad \cdots\cdots(答)$$

となる。

〔2〕

求める力の大きさを N' [N] とおくと、点 A において、質点には鉛直上向きの力 N' [N] と鉛直下向きの力 $mg + m\frac{v^2}{l}$ [N] が働き、両者はつり合っているから、

$$N' = mg + m\frac{v^2}{l}$$

が成り立つ。よって、

$$N' = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right)\ [\mathrm{N}]\quad \cdots\cdots(答)$$

となる。

〔3〕～〔5〕

【方針】

設問〔4〕では「質点が角度 $\theta = \theta_0$ の位置でつりあい」と言う文言より、$\theta = \theta_0$ において質点に働く力について、力のつり合いの式を立てればよいことに気づく。この点を 1 つの手掛かりとして、「原則４．運動の方程式と重力」や「原則１２．単振動の運動方程式と周期など」の知識を利用して順に解いてゆく。

【解説】

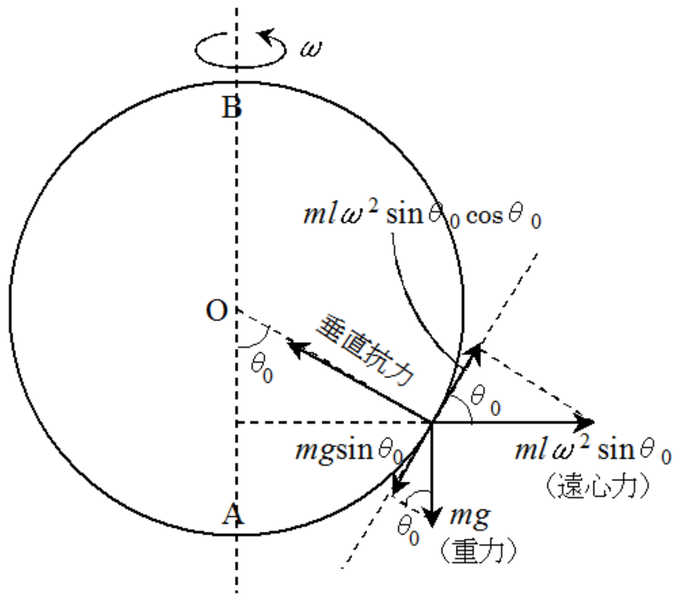
〔3〕

角度 θ の位置に質点がある場合、円運動の半径 r [m] が $r = l\sin\theta$ となるので、遠心力の大きさ F [N] は

$$F = mr\omega^2 = ml\omega^2\sin\theta\ [\mathrm{N}]\quad \cdots\cdots(答)$$

となる。

〔4〕



（図は WEB 上で見つからなかったため自作）

円環上から見て $\theta = \theta_0$ の位置で質点が静止しているとき、上図のように質点に力が働く。よって、円環の接線方向の力のつり合いから、

$$ml\omega^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 - mg\sin\theta_0 = 0$$

と言う式が導かれ、この式より、角速度 ω は

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_0}}$$

となる。$\theta_0 \to 0$ のとき $\cos\theta_0 \to 1$ であるから、ω の下限値 ω_1 は

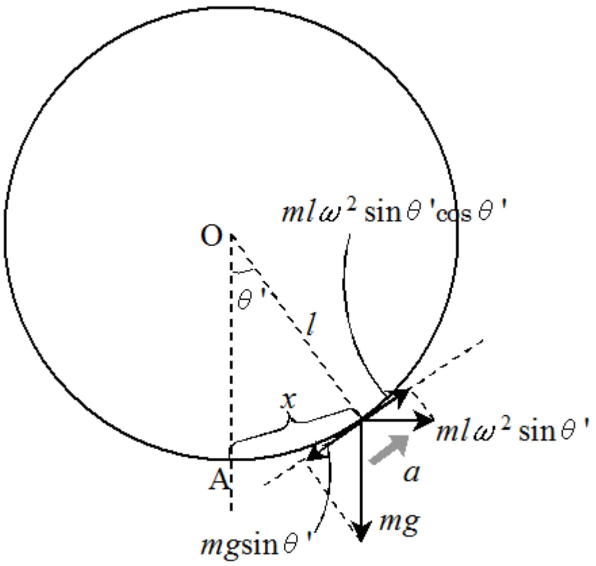
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}\ [\mathrm{rad/s}] \quad \cdots\cdots(答)$$

となる。すなわち、

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_0}} \geqq \sqrt{\frac{g}{l}} = \omega_1$$

となっている。

〔5〕



（図は WEB 上で見つからなかったため自作）

$\omega_1 \leqq \omega$ の場合は $\theta = \theta_0$ が安定なつり合いの位置になり、$0 \leqq \omega < \omega_1$ の場合は A の位置（$\theta = 0$）が安定なつり合いの位置になる。よって、$0 \leqq \omega < \omega_1$ で A から微小な角度 θ' の位置（$\theta' \ll 1$）にあるときは、A を振動中心とする単振動となる。

角度 $\theta = \theta'$ における点 A からの円環に沿った変位、加速度を、それぞれ x [m] 、a [m/s^2] とおくと、円環とともに回転をする系から見たとき、質点に働く重力と遠心力の接線方向の成分は、上図のようになる。よって、質点の運動方程式は、近似式 : $\sin\theta' \fallingdotseq \theta'$ 、$\cos\theta' \fallingdotseq 1$ を用いると、次式のようになる。

$$ma = -mg\sin\theta' + ml\omega^2\sin\theta'\cos\theta' \fallingdotseq -m(g - l\omega^2)\theta' = -\frac{m(g-l\omega^2)}{l}x \quad \left(\because\ \theta' = \frac{x}{l}\right)$$

この運動方程式は、$k = \frac{m(g-l\omega^2)}{l}$ とおくと、

$$ma = -kx$$

と表されるから、単振動をすることがわかる。したがって、この単振動の周期 T [s] は、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-l\omega^2}}\ [\mathrm{s}]$$ ……(答)

となる。

4

原則６．熱力学第１法則とモル比熱　（前述）　　　→　〔4〕に利用

原則１３．気体の状態方程式と各法則　　　→　〔2〕～〔5〕に利用
一般に、体積 V [m^3] 、圧力 P [Pa] 、温度 T [K] 、物質量 n [mol] の気体においては、次式で表される気体の状態方程式が成り立つ。

$$PV = nRT \quad \cdots\cdots ①$$

なお、R は気体定数と呼ばれるもので、$R \fallingdotseq 8.31$ [J/(mol・K)] である。
また、気体の状態方程式より、標準状態（0 ℃ 、1.01×10^5 Pa）での気体 1 mol の占める体積は、気体の種類によらず 22.4 L となる。
ところで、物質量が一定であれば、気体の状態方程式（①式）より、次式で表されるボイル・シャルルの法則が導かれる。

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \quad \cdots\cdots ②$$

また、温度一定の条件下では、②式より、次式で表されるボイルの法則が導かれる。

$$P_1V_1 = P_2V_2 \quad \cdots\cdots ③$$

同様に、圧力一定の条件下では、②式より、次式で表されるシャルルの法則が導かれる。

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \cdots\cdots ④$$

なお、断熱変化においては、圧力、体積について、次の関係式が成り立つ（ただし、自由膨張の場合、次式は成り立たない）。

$$P_1{V_1}^{\gamma} = P_2{V_2}^{\gamma} \ \left(\gamma = \frac{C_\mathrm{P}}{C_\mathrm{V}} \text{：比熱比} \right) \cdots\cdots ⑤$$

〔1〕～〔3〕
【方針】
問題文と図１より、容器 A 内の気体の圧力 p_A [Pa] と管 B 内の液体の圧力 $p_0 + p_\mathrm{B}$ [Pa] の差は、液面の高さ h [m] に相当する圧力 ρhg [Pa] になることに気づく。この点を踏まえて、「原則１３．気体の状態方程式と各法則」の知識を利用して順に解いてゆく。
【解説】
〔1〕
液体中において h [m] 深くなると、圧力は ρhg [Pa] だけ増加する。よって、

$$p_0 + p_\mathrm{B} = p_\mathrm{A} + \rho hg$$

となるから、

$$p_{\mathrm{A}} = p_0 + p_{\mathrm{B}} - \rho h g \ [\mathrm{Pa}]$$ ……(答)

となる。

〔2〕

容器 A 内にある気体の体積を $V_{\mathrm{A}}\ [\mathrm{m^3}]$ とおくと、断熱変化の関係式より、次式が得られる。

$$p_{\mathrm{A0}} {V_{\mathrm{A0}}}^{\gamma} = p_{\mathrm{A}} {V_{\mathrm{A}}}^{\gamma} \qquad \therefore\ V_{\mathrm{A}} = \left(\frac{p_{\mathrm{A0}}}{p_{\mathrm{A}}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_{\mathrm{A0}}\ [\mathrm{m^3}]$$

$V_{\mathrm{A0}} - V_{\mathrm{A}}\ [\mathrm{m^3}]$ が容器 A 内に流入した液体の体積であるから、

$$V_{\mathrm{A0}} - V_{\mathrm{A}} = \left\{1 - \left(\frac{p_{\mathrm{A0}}}{p_{\mathrm{A}}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\} V_{\mathrm{A0}}\ [\mathrm{m^3}]$$ ……(答)

となる。

〔3〕

容器 A 内にある気体の温度を $T_{\mathrm{A}}\ [\mathrm{K}]$ とおくと、ボイル・シャルルの法則より、次式が得られる。

$$\frac{p_{\mathrm{A0}} V_{\mathrm{A0}}}{T_0} = \frac{p_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}}}{T_{\mathrm{A}}} \qquad \therefore\ T_{\mathrm{A}} = \frac{p_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}}}{p_{\mathrm{A0}} V_{\mathrm{A0}}} T_0 = \frac{p_{\mathrm{A}}}{p_{\mathrm{A0}}} \cdot \left(\frac{p_{\mathrm{A0}}}{p_{\mathrm{A}}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} T_0 = \left(\frac{p_{\mathrm{A}}}{p_{\mathrm{A0}}}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} T_0\ [\mathrm{K}]$$ ……(答)

〔4〕・〔5〕

【方針】

〔3〕の結果の $T_{\mathrm{A}} = \left(\frac{p_{\mathrm{A}}}{p_{\mathrm{A0}}}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} T_0$ と、$p_{\mathrm{A}} > p_{\mathrm{A0}}$ 、$\gamma > 1$ より、液体流入による断熱圧縮の直後は $T_{\mathrm{A}} > T_0$ となっていることに気づく。この点を踏まえて、「原則１３．気体の状態方程式と各法則」や「原則６．熱力学第 1 法則とモル比熱」の知識を利用して順に解いてゆく。

【解説】

〔4〕

断熱圧縮の場合、気体は外部から仕事をされるから、内部エネルギーが上昇して、温度が高くなる。また、高温物体から低温物体へ熱が移動するから、温度が高くなった容器内部の気体から大気へ熱量が放出される。一方、流入した液体の温度は $T_0\ [\mathrm{K}]$ であり変化しないから、液体の熱量の移動を考える必要はない。よって、単原子分子理想気体の定積変化での熱量の放出について計算すればよい。これらの点を踏まえて、解いてゆく。

はじめ、断熱圧縮により、容器内にある気体の温度は上昇するから、$T_{\mathrm{A}} > T_0$ となる。次に、定積変化により、気体の温度が $T_{\mathrm{A}}\ [\mathrm{K}]$ より $T_0\ [\mathrm{K}]$ へ下降するから、熱は容器 A から大気へ移動する。 ……(答)

その熱量 $Q\ [\mathrm{J}]$ は、気体定数を $R\ [\mathrm{J/(mol \cdot K)}]$ 、気体の物質量を $n\ [\mathrm{mol}]$ とおくと、状態方程式からの $nRT_{\mathrm{A}} = p_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}}$ 、$nRT_0 = p_{\mathrm{A0}} V_{\mathrm{A0}}$ を用いて、

$$Q=\frac{3}{2}nR(T_{\mathrm{A}}-T_0)=\frac{3}{2}(p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{A0}}V_{\mathrm{A0}})=\frac{3}{2}\left\{p_{\mathrm{A}}\left(\frac{p_{\mathrm{A0}}}{p_{\mathrm{A}}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}-p_{\mathrm{A0}}\right\}V_{\mathrm{A0}}\ [\mathrm{J}]\ \cdots\cdots(\text{答})$$

となる。

〔5〕

①：状態方程式 $p_{\mathrm{A0}}V_{\mathrm{A0}}=nRT_0$ より、気体の物質量 n [mol] の増加によって圧力 p_{A0} [Pa] が増加するから、先端 a を開いたときに流入する液体の体積は減る。

②：挿入角度 θ を大きくした場合、液面の高さ h [m] が大きくなって圧力 p_{A} [Pa] が減少するから、気体の体積変化が小さくなって、液体の流入は減少する。

③：全体を自由落下させた場合、みかけ上の重力加速度が 0 になって、〔1〕の結果より圧力 p_{A} [Pa] が増加するから、気体の体積変化が大きくなって、流入する液体の体積は増える。

④：容器内の気体の温度を高くした場合、状態方程式と断熱変化の式により、容器内にある気体の圧力 p_{A0} [Pa] が増加して、流入する液体の体積は減る。

以上より、解答は、①、②、④である。

$\boxed{5}$

原則１２．単振動の運動方程式と周期など　（前述）→〔1〕～〔3〕・〔5〕～〔7〕に利用

原則１４．ドップラー効果の公式　　→　〔4〕・〔8〕に利用

音源だけが移動し、観測者が静止している場合、観測者が聞く音の振動数 f は、次式で表される。ただし、f_0 は音源の振動数、V は音波の伝わる速さ、u は音源の移動速度（注 1）である。

$$f = \frac{V}{V-u} f_0$$

また、音源と観測者がともに移動している場合、観測者が聞く音の振動数 f は、次式で表される。ただし、f_0 は音源の振動数、V は音波の伝わる速さ、u_1 は音源の移動速度（注 1）、u_2 は観測者の移動速度（注 1）である。

$$f = \frac{V-u_2}{V-u_1} f_0$$

（注 1）移動速度の符号は、移動の向きが音波の伝わる向きと同じ場合を正、逆の場合を負とする。

〔1〕～〔4〕

【方針】

「変位 $z\,[\mathrm{m}] = 2.00\cos(17.0t)$ で z 軸上を単振動している」と言う文言より、この単振動の振幅、周期、角振動数は容易に求められることに気づく。この点を最初の手掛かりとして、「原則１２．単振動の運動方程式と周期など」や「原則１４．ドップラー効果の公式」の知識を利用して順に解いてゆく。

【解説】

〔1〕

単振動の周期を $T\,[\mathrm{s}]$ 、角振動数を $\omega\,[\mathrm{rad/s}]$ 、振幅を $A\,[\mathrm{m}]$ とおく。$z = A\cos\omega t$ と $z = 2.00\cos(17.0t)$ を比較すると、

$$A = 2.0\,[\mathrm{m}]\ ,\ \omega = 17\,[\mathrm{rad/s}]\ \cdots\cdots(答)$$

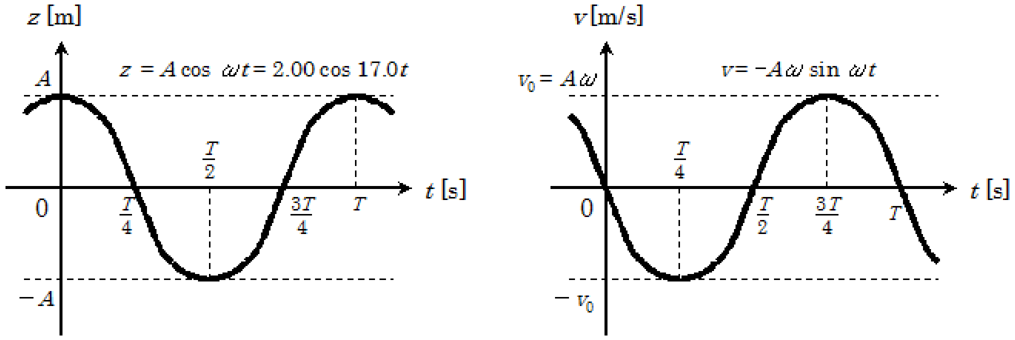
となる。よって、

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\times3.14}{17} = 0.369 \fallingdotseq 0.37\,[\mathrm{s}]\ \cdots\cdots(答)$$

となる。

〔2〕

z 軸上を単振動している音源の変位 $z\,[\mathrm{m}]$ の式が $z = A\cos\omega t = 2.00\cos(17.0t)$ であるとき、速度 $v\,[\mathrm{m/s}]$ の式は $v = -A\omega\sin\omega t$ となり、横軸に時刻 $t\,[\mathrm{s}]$ を取ったグラフは、下図のようになる。



（図は WEB 上で見つからなかったため自作）

上図より、$t = \frac{1}{4}T$ [s] と $\frac{3}{4}T$ [s] で、音源の速さは最大になる。すなわち、音源の速さは振動中心で最大になる。よって、速さが最大になる時刻は、$0 < t \leqq T$ の範囲で

$t = \frac{1}{4}T$ [s] と $\frac{3}{4}T$ [s] ……(答)

となる。

また、上図より、$t = \frac{1}{2}T$ [s] と T [s] で、音源の速さは 0 になる。すなわち、音源の速さは振動の端で最小（0 m/s）になる。よって、速さが最小になる時刻は、$0 < t \leqq T$ の範囲で

$t = \frac{1}{2}T$ [s] と T [s] ……(答)

となる。

〔3〕

音源の最大の速さを v_0 [m/s] とすると、「原則１２．単振動の運動方程式と周期など」より、$v_0 = A\omega$ となるから、

$v_0 = A\omega = 2.00 \times 17.0 = 34$ [m/s] ……(答)

となる。

〔4〕

$z = 5.00$ m の点で観測するから、$v = -v_0$ [m/s] のときに音の周波数が最小（周期が最大）、$v = v_0$ [m/s] のときに音の周波数が最大（周期が最小）になることがわかる。この点を踏まえて、解いてゆく。

音速を V [m/s] 、音源の周波数を f [Hz] とおく。音源が振動中心を観測者から速さ v_0 [m/s] で遠ざかるとき、観測者が観測する周波数は最小値 f_1 [Hz] となり、その周期は最大値 T_1 [s] となる。よって、ドップラー効果の式を用いて、

$$f_1 = \frac{V}{V+v_0}f \qquad \therefore\ T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{V+v_0}{Vf} = \frac{340+34}{340\times1000} = 1.1 \times 10^{-3}\ [\mathrm{s}] \quad \cdots\cdots(答)$$

となる。また、音源が観測者に速さ v_0 [m/s] で近づくとき、観測される周波数は最大値 f_2 [Hz] となり、その周期は最小値 T_2 [s] となるから、同様に、ドップラー効果の式を用いて、

$$f_2 = \frac{V}{V-v_0} f \qquad \therefore\ T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{V-v_0}{Vf} = \frac{340-34}{340\times 1000} = 9.0\times 10^{-4}\ [\mathrm{s}] \quad \cdots\cdots(答)$$

となる。

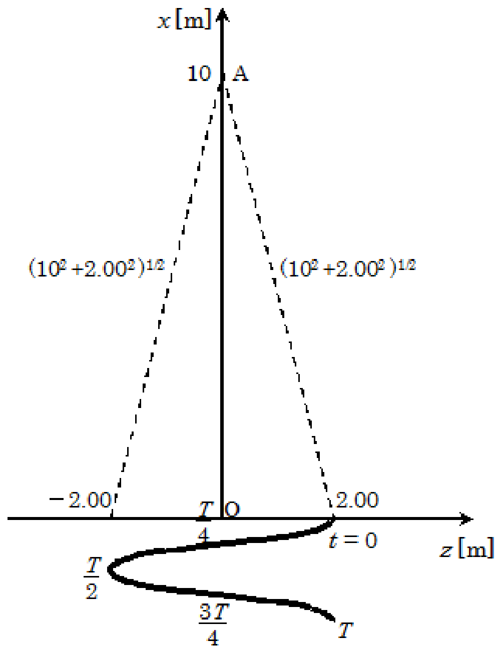
〔5〕～〔8〕

【方針】

問題文より、観測者の位置は「点 A（ $x = 10.0$ m， $z = 0$ m ）」であるから、音源が $z = 0$ m を通過するときに出す音の周波数は、観測者においても音源と同じ 1000 Hz として観測されることがわかる。この点を１つの手掛かりとして、「原則１２．単振動の運動方程式と周期など」や「原則１４．ドップラー効果の公式」の知識を利用して順に解いてゆく。

【解説】

〔5〕



（図は WEB 上で見つからなかったため自作）

$z = 2.00$ m，-2.00 m の点における音源の速度は $v = 0$ m/s である。また、$z = 0$ m の点における音源の速さは最大であるが、点 A へ向かう速度成分は 0 である。よって、これらの点を出た音は、点 A において音源の周波数と同じ 1000 Hz の音波として観測される。すなわち、音源の速度が 0 m/s の時点と音源が $z = 0$ m を通過した時点に出した音波は、観測者へ向かう速度成分がないため、観測者にはいずれも周波数 1000 Hz の音波として観測される。したがって、$0 < t \leqq T$ の範囲において、それらの点を音源が通過する時刻は $\frac{1}{4}T$ 、$\frac{1}{2}T$ 、$\frac{3}{4}T$ 、T である。よって、$x = 10.0$ m の点 A で音が観測されるそれぞれの時刻を t_1 [s] 、t_2 [s] 、t_3 [s] 、t_4 [s] とおくと、観測される時刻は、音源が通過する時刻（ $\frac{1}{4}T$ 、$\frac{1}{2}T$ 、$\frac{3}{4}T$ 、T ）に、点 A まで音波が伝搬する時間を加えたものになるから、

$$t_1 = \frac{1}{4}T + \frac{10}{340} = \frac{1}{4}T + 0.0294\ [\mathrm{s}]$$ ……(答)

$$t_2 = \frac{1}{2}T + \frac{\sqrt{10^2+2^2}}{340} = \frac{1}{2}T + 0.0299\ [\mathrm{s}]$$ ……(答)

$$t_3 = \frac{3}{4}T + \frac{10}{340} = \frac{3}{4}T + 0.0294\ [\mathrm{s}]$$ ……(答)

$$t_4 = T + \frac{\sqrt{10^2+2^2}}{340} = T + 0.0299\ [\mathrm{s}]$$ ……(答)

となる。

〔6〕

時刻 t [s] での音源の速度 v [m/s] は、速度の正の向きを z 軸の正の向きにとると、

$$v = -v_0 \sin \omega t$$

となる。音源の速度の S から A へ向かう成分を $v_{\mathrm{S-A}}$ [m/s] 、線分 AS と x 軸がなす角を θ とおき、$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ の公式を用いると、

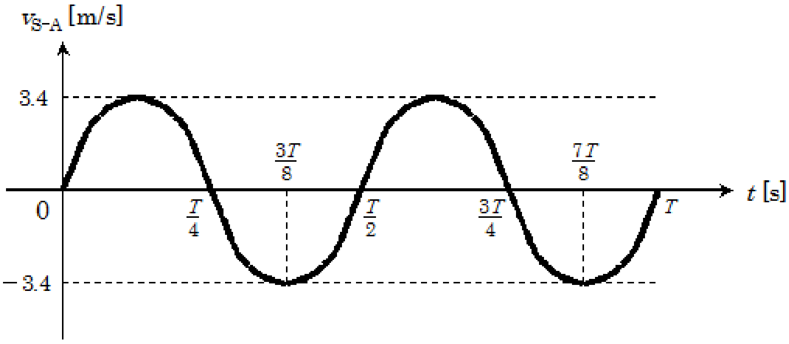
$$v_{\mathrm{S-A}} = -v\sin\theta \fallingdotseq -v\tan\theta = v_0 \sin\omega t \tan\theta = v_0 \sin\omega t \cdot \frac{z}{10} = 34.0 \sin\omega t \cdot \frac{2.00\cos\omega t}{10}$$
$$= 6.80 \sin\omega t \cos\omega t = 3.40 \sin 2\omega t = 3.40 \sin 34.0t\ [\mathrm{m/s}]$$

となる。ゆえに、音源の速度の SA 方向の大きさ v_{SA} は、

$$v_{\mathrm{SA}} = |v_{\mathrm{S-A}}| = 3.40|\sin 34.0t|\ [\mathrm{m/s}]$$ ……(答)

となる。

〔7〕



(図は WEB 上で見つからなかったため自作)

前問の〔6〕で求めた $v_{\mathrm{S-A}} = 3.40 \sin 34.0t$ [m/s] をグラフに表すと、上図のようになる。よって、上図より、$v_{\mathrm{S-A}}$ [m/s] は、$t = \frac{3}{8}T$ [s] と $\frac{7}{8}T$ [s] のとき、$v_{\mathrm{S-A}} < 0$ となって、大きさが最大となることがわかる。すなわち、$t = \frac{3}{8}T$ [s] と $\frac{7}{8}T$ [s] のとき、

$$v_{\mathrm{S-A}} = 3.40 \sin 2\omega t = -3.40\ [\mathrm{m/s}]$$

となり、このときに音源から出た音が最も低い音として A で観測される。したがって、

最も低い音として観測される音が出る時刻 t [s] は、$0 < t \leqq T\ \left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$ の範囲において、

$$2\omega t = \frac{3\pi}{2}\ ,\ \frac{7\pi}{2} \quad \rightarrow \quad t = \frac{3\pi}{4\omega} = \frac{3}{8}T\ ,\ t = \frac{7\pi}{4\omega} = \frac{7}{8}T$$

であり、これらの時刻における音源の位置 z [m] は、以下のようになる。

$$t = \frac{3}{8}T \text{ のとき } \quad z = 2.00\cos\omega t = 2.00\cos\omega\cdot\frac{3}{8}T = 2.00\cos\left(2\pi\cdot\frac{3}{8}\right) = -\sqrt{2}\ [\mathrm{m}]$$

$$t = \frac{7}{8}T \text{ のとき } \quad z = 2.00\cos\omega t = 2.00\cos\omega\cdot\frac{7}{8}T = 2.00\cos\left(2\pi\cdot\frac{7}{8}\right) = \sqrt{2}\ [\mathrm{m}]$$

これらの時刻に音源から出た音波が点Aの観測者に届くそれぞれの時刻を t_5 [s]、t_6 [s] とおくと、観測される時刻は、これらの時刻（$\frac{3}{8}T$、$\frac{7}{8}T$）に、点 A まで音波が伝搬する時間を加えたものになるから、

$$t_5 = \frac{3}{8}T + \frac{\sqrt{10^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}{340} = \frac{3}{8}T + 0.0297\ [\mathrm{s}] \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$t_6 = \frac{7}{8}T + \frac{\sqrt{10^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}{340} = \frac{7}{8}T + 0.0297\ [\mathrm{s}] \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる。

〔8〕

音源Sが点Aにいる観測者から遠ざかるときの速度成分の最大値を v_{sam} [m/s] とおくと、〔6〕の結果から、$v_{\mathrm{sam}} = 3.40$ m/s である。このとき、Aで観測される音波の周期を T' [s]、周波数を f' [Hz] とおくと、ドップラー効果の式より、

$$f' = \frac{V}{V+v_{\mathrm{sam}}}f \qquad \therefore\ T' = \frac{1}{f'} = \frac{V+v_{\mathrm{sam}}}{Vf} = \frac{340+3.40}{340\times1000} = 1.01\times10^{-3}\ [\mathrm{s}] \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる。