

Q. (数3 基礎問題精講 p173 演習 94)

最後の \cos の公式がありますか。

[回答者の頭の中]

$\sqrt{a-x^2}$ の積分を見たら、 x を $\sqrt{a}\sin\theta$ または $\sqrt{a}\cos\theta$ で置換することは定石です。その理由は置換すると $\sqrt{a-x^2}=\sqrt{a}\sin\theta, \cos\theta$ になるからです。

A.

$$\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx$$

を $x=2\sin\theta$ と置換すると

$$\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta \cdot 2\cos\theta \cdot 2\cos\theta d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta d\theta$$

となる。 $(\cos\theta)' = -\sin\theta$ より

$$8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = 8[\cos^3\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}$$

となる。