杏林 2015　数学

配点

Ⅰ.（a）各 2 点（b）各 3 点，テトのみ 5 点（2×3＋3×4＋5）
Ⅱ.（a）各 2 点（b）各 3 点（2×6＋3×3）
Ⅲ.（a）ア：4 点　イ：2 点（b）各 2 点　（c）各 4 点（4＋2＋2×4＋4×3）
Ⅳ.各 5 点（5×6）

杏林大学入試問題

2015 年数学

解答・解説編

①小問集合

○原則

１．◆確率

ある試行において、起こりうるすべての場合の数を N、事象 A が起こる場合の数を a とすると、事象 A が起こる確率$P(A)$ は

$$P(A)=\frac{a}{N}$$

２．◆漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ 型

特性方程式 $\alpha=p\alpha+q$ の解 α を用いて

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$$

と式変形でき、数列$\{a_n-\alpha\}$ は初項$a_1-\alpha$、公比 p の等比数列なので

$$a_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}+\alpha$$

３．◆累乗の極限

$$\lim_{n\to\infty} r^n=\begin{cases}+\infty\ (r>1)\\ 1\ (r=1)\\ 0(|r|<1)\\ \text{振動}\ (r\leqq -1)\end{cases}$$

○解答・解説

(a)

【方針】

数字の和がどのような値をとり得るのか具体的に考えます。その中から最も出やすい和の値を求め、確率を計算します。2 枚のカードの 2 乗の差が 5 の倍数になるのは、因数分解によって 2 枚のカードの和または差が 5 の倍数になるときです。このことを利用して場合の数を求め、確率を計算します。

【解説】

2 枚のカードの和は、次の表のようになります。

表から 9 が最も出やすく 4 回あります。また、起こり得る全ての場合の数は

$${}_8C_2=\frac{8\cdot 7}{2!}=4\cdot 7$$

なので、その和の確率は$\frac{4}{4\cdot 7}=\underline{\frac{1}{7}}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	—	3	4	5	6	7	8	9
2	—	—	5	6	7	8	9	10
3	—	—	—	7	8	9	10	11
4	—	—	—	—	9	10	11	12
5	—	—	—	—	—	11	12	13
6	—	—	—	—	—	—	13	14
7	—	—	—	—	—	—	—	15
8	—	—	—	—	—	—	—	—

次に、2 枚のカードの数を a,b とすると 2 乗の差が 5 の倍数になるのは

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=5k$$

より、2 枚のカードの和または差が 5 の倍数になるときです。

和が 5 の倍数となるのは、表から

$(1,4)$, $(2,3)$, $(2,8)$, $(3,7)$, $(4,6)$, $(7,8)$ の 6 通り

差が 5 の倍数となるのは、

$(1,6)$, $(2,7)$, $(3,8)$ の 3 通り

以上から、求める確率は

$$\frac{6+3}{4\cdot 7}=\underline{\frac{9}{28}}$$

(b)

【方針】

P_2 は試行を 2 回行ったときなので反復試行の問題です。

P_n の漸化式を立てるには、$n+1$ 回目とn 回目の関係から導きます。つまり$n+1$ 回の試行で奇数回事象が起こるには、 n 回目がどうゆう状態で、どのように $n+1$ 回目に推移すればよいのか考えます。

【解説】

事象 A を「2 枚のカードの和が 4 の倍数となる。」とします。

事象 A が起こるのは表から

$(1,3)$, $(1,7)$, $(2,6)$, $(3,5)$, $(4,8)$, $(5,7)$ の 6 通りなので

1 回の操作で事象 A が起こる確率 p は

$$p=\frac{6}{4\cdot 7}=\frac{3}{14}$$

よって、1 回の操作で事象 A が奇数回起こる確率P_1 は

$$P_1=p=\underline{\frac{3}{14}}$$

また、2 回の操作で事象 A が奇数回起こる、つまり 1 回起こる確率P_2 は

$$P_2={}_2C_1p(1-p)=2\cdot\frac{3}{14}\cdot\left(1-\frac{3}{14}\right)=\underline{\frac{33}{98}}$$

次に、$n+1$ 回の操作で事象 A が奇数回起こるのは、次の 2 通り考えられます。

ⅰ）n 回の操作で、事象 A が奇数回起きて、$n+1$ 回目の操作で事象 A が起こらない。このときの確率は

$$P_n\times(1-p)=\frac{11}{14}P_n$$

ⅱ）n 回の操作で、事象 A が偶数回起きて、$n+1$ 回目の操作で事象 A が起きる。このときの確率は

$$(1-P_n)\times p=\frac{3}{14}(1-P_n)$$

ⅰ）ⅱ）より

$$P_{n+1}=\frac{11}{14}P_n+\frac{3}{14}(1-P_n)$$

$$\underline{=\frac{4}{7}P_n+\frac{3}{14}}$$

特性方程式

$$\alpha=\frac{4}{7}\alpha+\frac{3}{14}$$

$$\alpha=\frac{1}{2}$$

$$P_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{4}{7}\left(P_n-\frac{1}{2}\right)$$

$$P_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}\left(P_1-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}\left(\frac{3}{14}-\frac{1}{2}\right)$$

$$P_n=-\frac{2}{7}\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$$

$$0 < \frac{4}{7} < 1 \text{ より } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1} = 0$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{2}{7}\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\right\} = \underline{\frac{1}{2}}$$

-----参考-----

仮に、P_n が収束して $\lim_{n\to\infty} P_n = \alpha$ とします。

漸化式の両辺の極限をとると

$$P_{n+1} = \frac{4}{7}P_n + \frac{3}{14}$$

$$\alpha = \frac{4}{7}\alpha + \frac{3}{14}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \therefore \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2}$$

これは、検算用に使います。数列が収束することを仮定しているので、そのことを証明する必要があるからです。

②2 次曲線・軌跡

○原則

1．◆直線の方程式

傾き a で点$(p,\ q)$ を通る直線の方程式は

$$y = a(x - p) + q$$

2．◆楕円の接線

楕円F：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ について

Ⅰ） 楕円Fと直線 $y = px + q$ が接する

$\Leftrightarrow$

xについての 2 次方程式 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{(px+q)^2}{b^2} = 1$ が重解を持つ

$\Leftrightarrow$

判別式 $D = 0$

Ⅱ）楕円上の点$(x_1,\ x_2)$における接線の方程式

$$\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1$$

３．◆解と係数の関係

Ⅰ）二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を$\alpha,\ \beta$ とします。このとき

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

Ⅱ）2 数$\alpha,\ \beta$ に対して、$p=\alpha+\beta,\ q=\alpha\beta$ とすると

2 次方程式 $t^2-pt+q=0$ の 2 解は、$\alpha,\ \beta$ となります。

４．◆2 直線の直交条件

2 直線 $y=m_1x+n_1,\ y=m_2x+n_2$ について

2 直線が垂直$\Leftrightarrow m_1m_2=-1$

５．◆軌跡

点$\mathrm{P}(X,\ Y)$ が条件 A を満たすときの軌跡を求めるということは

集合$\{(X,\ Y)\mid \text{条件 A}\}$

がどのような図形を表すかを求めることになります。

条件 A ではよく分からないので、同値変形して図形を表す方程式を導きます。

条件 A $\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow$ 図形を表す方程式（例：円 $X^2+Y^2=1$）

軌跡で注意するのは、得られた図形上のすべての点が条件 A を満たしているかどうかです。そういった理由で同値変形するわけです。但し、軌跡の方程式だけを求める場合は、このことは必要ありません。必要条件($\Longrightarrow$)で図形の方程式を求めます。

○解答・解説

(a)

【方針】

楕円の接線に関する問題では、原則のように①判別式、②接線の公式の 2 通りの考え方があります。この問題は、①判別式を使う誘導となっています。それに従うと接線の傾きが求められる 2 次方程式を得ます。

後半は、tan の図形的な意味は、直線の傾きです。接線の傾きについては、前半で

分かっているので、それらを tan で表すという方針が立ちます。あとは、α との関連を図から見つけ、それらを使って$\tan 2\alpha$ を求めます。

【解説】

楕円F： $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$

点 A(1, 2) を通る傾き k の直線の方程式は

$y=k(x-1)+2$

で表されます。この直線と楕円F が接するとき、2 つの方程式を連立して得られる 2 次方程式の判別式D は、$D=0$ となります。つまり

$$\frac{x^2}{2}+\frac{\{k(x-1)+2\}^2}{3}=1$$

$$3x^2+2\{kx-(k-2)\}^2=6$$

$$3x^2+2\{k^2x^2-2k(k-2)x+(k-2)^2\}=6$$

$$(2k^2+3)x^2-4k(k-2)x+2(k-2)^2-6=0$$

この 2 次方程式の判別式 D として

$$\frac{D}{4}=\{2k(k-2)\}^2-(2k^2+3)\{2(k-2)^2-6\}=0$$

$$4k^2(k-2)^2-4k^2(k-2)^2+12k^2-6(k-2)^2+18=0$$

$$2k^2-(k-2)^2+3=0$$

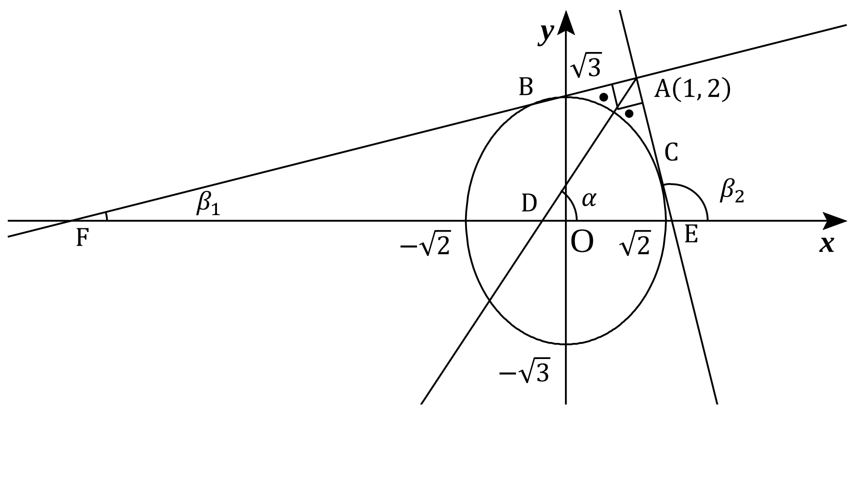
$$k^2+4k-1=0$$

この 2 次方程式の 2 つの解を k_1, k_2 とおくと、解と係数の関係より

$$\begin{cases} k_1+k_2=-4\cdots① \\ k_1k_2=-1\cdots② \end{cases}$$

また、k_1, k_2 は 2 つの接線の傾きとなるので②と合わせて

求めるなす角は、$\underline{\dfrac{\pi}{2}}$



次に、2 つの接線と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ β_1, β_2 とおきます。

△AFD で

$$\beta_1 + \frac{\pi}{4} = \alpha \cdots ③$$

△ADE で

$$\alpha + \frac{\pi}{4} = \beta_2 \cdots ④$$

③④より

$$2\alpha = \beta_1 + \beta_2$$

ここで、接線の傾き k_1, k_2 を β_1, β_2 を使って表すと

$$k_1 = \tan\beta_1, \qquad k_2 = \tan\beta_2$$

となるので、①②から

$$\tan\beta_1 + \tan\beta_2 = -4, \quad \tan\beta_1 \tan\beta_2 = -1$$

以上のことから

$$\tan 2\alpha = \tan(\beta_1 + \beta_2) = \frac{\tan\beta_1 + \tan\beta_2}{1 - \tan\beta_1 \tan\beta_2}$$

$$= \frac{-4}{1-(-1)} = \underline{-2}$$

(b)

【方針】

(a)と同じ内容なので同様な考え方をします。また、この問題は「軌跡」を求めるのではなく、「軌跡の方程式」を求めるだけです。逆向き、つまり、得られた曲線上のすべての点で、∠QPR の 2 等分線の傾きが 1 となることを確認する必要はありません。

十分性のチェックが必要なく、必要条件だけで計算を進めます。

【解説】

楕円 F の外部の点を $\mathrm{P}(X, Y)$ 、また

条件 A：2 直線 PQ, PR は楕円 F の接線

条件 B：∠QPR の 2 等分線の傾きは 1

とします。

集合 $\{(X, Y) | \mathrm{A} \cap \mathrm{B}\}$ の表す図形が、どのようになるかを求めます。

そのために条件 A、条件 B を変形して図形の方程式を導きます。

まず、条件 A からです。
点 P を通る傾き k の直線の方程式は

$$y = k(x - X) + Y$$

で表され、楕円 F の方程式と連立すると

$$\frac{x^2}{2} + \frac{\{k(x - X) + Y\}^2}{3} = 1$$
$$3x^2 + 2\{kx - (kX - Y)\}^2 = 6$$
$$3x^2 + 2\{k^2x^2 - 2k(kX - Y)x + (kX - Y)^2\} = 6$$
$$(2k^2 + 3)x^2 - 4k(kX - Y)x + 2(kX - Y)^2 - 6 = 0$$

直線と楕円が接するとき、この 2 次方程式の判別式 D は、 $D = 0$ となるので

$$\frac{D}{4} = \{2k(kX - Y)\}^2 - (2k^2 + 3)\{2(kX - Y)^2 - 6\} = 0$$
$$4k^2(kX - Y)^2 - 4k^2(kX - Y)^2 + 12k^2 - 6(kX - Y)^2 + 18 = 0$$
$$2k^2 - (kX - Y)^2 + 3 = 0$$
$$(2 - X^2)k^2 + 2XYk - Y^2 + 3 = 0 \cdots ①$$

$X \neq \pm\sqrt{2}$ のとき、

①は、k についての 2 次方程式であり、2 つの接線 PQ、PR の傾きをそれぞれ、$l_1,\ l_2$ とすると、それらは①の解になります。
解と係数の関係より

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = -\dfrac{2XY}{2 - X^2} \\ l_1 l_2 = \dfrac{3 - Y^2}{2 - X^2} \end{cases}$$

以上のことから

$$\text{条件 A} \Longrightarrow \begin{cases} l_1 + l_2 = -\dfrac{2XY}{2 - X^2} \\ l_1 l_2 = \dfrac{3 - Y^2}{2 - X^2} \end{cases} \left(l_1, l_2 \text{は接線 PQ, PR の傾き}\right)$$

次に条件 B を考えます。
接線 PQ と x軸の正の向きとのなす角を γ_1、接線 PR と x軸の正の向きとのなす角を γ_2 とおきます。また、図のように各点を P,Q,R,S,T,U とします。
∠QPR の 2 等分線の傾きが 1 なので、x 軸の正の向きとのなす角は $\dfrac{\pi}{4}$ です。

△PST で

$$\gamma_1+\theta=\frac{\pi}{4}\cdots⑤$$

△PTU で

$$\theta+\frac{\pi}{4}=\gamma_2\cdots⑥$$

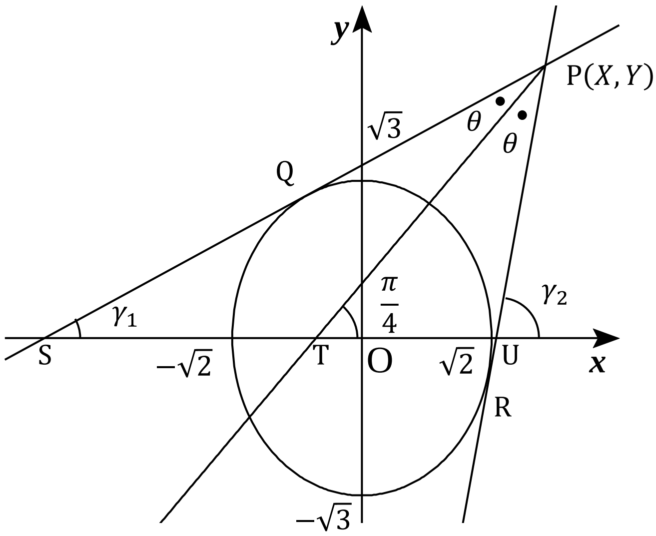
⑤⑥より

$$\gamma_1-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\gamma_2$$

$$\gamma_1=\frac{\pi}{2}-\gamma_2$$

よって

$$\text{条件 B}\Longrightarrow\gamma_1=\frac{\pi}{2}-\gamma_2$$



$l_1=\tan\gamma_1$, $l_2=\tan\gamma_2$で表されることに注意して、まとめると

$$\text{条件 A}\cap\text{B}\Rightarrow\begin{cases}l_1+l_2=-\dfrac{2XY}{2-X^2}\\ l_1l_2=\dfrac{3-Y^2}{2-X^2}\\ \gamma_2=\dfrac{\pi}{2}-\gamma_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\tan\gamma_1+\tan\gamma_2=-\dfrac{2XY}{2-X^2}\\ \tan\gamma_1\tan\gamma_2=\dfrac{3-Y^2}{2-X^2}\\ \gamma_2=\dfrac{\pi}{2}-\gamma_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tan\gamma_1+\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\gamma_1\right)=-\dfrac{2XY}{2-X^2}\\ \tan\gamma_1\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\gamma_1\right)=\dfrac{3-Y^2}{2-X^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\tan\gamma_1+\dfrac{1}{\tan\gamma_1}=-\dfrac{2XY}{2-X^2}\\ \tan\gamma_1\dfrac{1}{\tan\gamma_1}=\dfrac{3-Y^2}{2-X^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tan\gamma_1+\dfrac{1}{\tan\gamma_1}=-\dfrac{2XY}{2-X^2}\\ 1=\dfrac{3-Y^2}{2-X^2}\end{cases}\Rightarrow 1=\frac{3-Y^2}{2-X^2}$$

従って、点 $P(X,\ Y)$ は

$$1=\frac{3-Y^2}{2-X^2}\iff 2-X^2=3-Y^2\iff -X^2+Y^2=1$$

を満たします。

次に、$X=\sqrt{2}$ のとき

接線の 1 つは$x=\sqrt{2}$ で、x 軸の正の向きとのなす角は、$\dfrac{\pi}{2}$ なので

条件 B を満たすには、もう 1 つの接線は $y=\sqrt{3}$ 、このとき $\mathrm{P}\left(\sqrt{2},\ \sqrt{3}\right)$
$X=\sqrt{2}$ のときも同様にして、$\mathrm{P}\left(-\sqrt{2},-\sqrt{3}\right)$
いずれも $-X^2+Y^2=1$ を満たします。

従って、点 P は $\underline{-x^2+y^2=1}$ で表される$\underline{\text{双曲線上}}$にある。

③指数関数・対数関数

○原則

１．◆対称移動

関数 $y=f(x)$ について、次のような対称移動を考えます。

Ⅰ）x 軸に関して対称移動　　$y=-f(x)$
Ⅱ）y 軸に関して対称移動　　$y=f(-x)$
Ⅲ）原点に関して対称移動　　$y=-f(-x)$
Ⅳ）直線 $\mathrm{y}=x$ 軸に関して対称移動　　$x=f(y)\Leftrightarrow y=f^{-1}(x)$

２．◆関数の拡大縮小

関数 $y=f(x)$ について、原点を中心に x 軸方向に a 倍、y 軸方向に b 倍すると

$$\frac{y}{b}=f\left(\frac{x}{a}\right)\Leftrightarrow y=bf\left(\frac{x}{a}\right)$$

x 軸方向、y 軸方向それぞれ

$0<a<1$ のとき縮小、$a>1$ のとき拡大
$0<b<1$ のとき縮小、$b>1$ のとき拡大

２．◆対数関数の定義

$a>0,\ a\neq 1$ とします。任意の正の数 x に対して、$a^y=x$ となる実数 y の値がただ１つ定まります。この y を

$$y=\log_a x$$

で表し、対数関数といいます。従って、

$$y=\log_a x\ \Leftrightarrow x=a^y$$

このことから、次のことがいえます。

$$a^{\log_a x}=x$$

３．◆対数の性質

$a,b,c>0,\ a\neq 0,b\neq 0,c\neq 0,\ M,N>0$ とする。

Ⅰ） $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$　Ⅱ） $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

Ⅲ） $\log_a M^k = k \log_a M$　Ⅳ） $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

４．◆方程式とグラフ

方程式 $f(x) = g(x)$ の解の個数は、曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ との共有点の個数と一致する。

とくに、方程式 $f(x) = a\ (a：定数)$ の解の個数は、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ との共有点の個数と一致する。このように一方が定数関数のときは、扱いやすくなります。

５．◆二次方程式の解の配置

2 次方程式 $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ があるとき

Ⅰ）α より大きい相異なる 2 つの実数解を持つ条件は

①判別式 $D > 0$

②放物線 $y = f(x)$ の軸が

$$\alpha < x = -\frac{b}{2a}$$

③$f(\alpha) > 0$

Ⅱ）α より小さい相異なる 2 つの実数解を持つ条件は

①判別式 $D > 0$

②放物線 $y = f(x)$ の軸が

$$\alpha > x = -\frac{b}{2a}$$

③$f(\alpha) > 0$

Ⅱ）α とβ $(\alpha < \beta)$の間に相異なる 2 つの実数解を持つ条件は

①判別式 $D > 0$

②放物線 $y = f(x)$ の軸が

$$\alpha < x = -\frac{b}{2a} < \beta$$

③$f(\alpha) > 0,\ f(\beta) > 0$

○解答・解説

(a)

【方針】

原則に従って求めます。特に、対数関数は、指数関数の逆関数で定義されることから直線$y = x$ で対称となります。

また、アの解答は、該当するものをすべて選ぶので、①から⑥まで順に確認していきます。

【解説】

$y = \log_2 x$ をアの解答群それぞれで、移動します。

① $y = \log_2 x$ を x 軸に対称移動すると、$y = -\log_2 x$

これを、直線 $y = x$ に関して対称移動すると、$x = -\log_2 y$ より、$y = 2^{-x}$

以下同様にして

② $y = \log_2 x \xrightarrow[\boxed{y\text{軸}}]{} y = \log_2(-x) \xrightarrow[\boxed{y = x}]{} x = \log_2(-y) \longrightarrow -y = 2^x \longrightarrow y = -2^x$

③ $y = \log_2 x \xrightarrow[\boxed{\text{原点}}]{} -y = \log_2(-x) \xrightarrow[\boxed{y = x}]{} -x = \log_2(-y) \longrightarrow -y = 2^{-x} \longrightarrow y = -2^{-x}$

④ $y = \log_2 x \xrightarrow[\boxed{y = x}]{} x = \log_2 y \longrightarrow y = 2^x \xrightarrow[\boxed{x\text{軸}}]{} y = -2^x$

⑤ $y = \log_2 x \xrightarrow[\boxed{y = x}]{} x = \log_2 y \longrightarrow y = 2^x \xrightarrow[\boxed{y\text{軸}}]{} y = 2^{-x}$

⑥ $y = \log_2 x \xrightarrow[\boxed{y = x}]{} x = \log_2 y \longrightarrow y = 2^x \xrightarrow[\boxed{\text{原点}}]{} -y = 2^{-x} \longrightarrow y = -2^{-x}$

$y = 2^{-x}$ のグラフを x 軸方向に$\dfrac{1}{2}$倍すると、$y = 2^{-2x}$ となるので、

結局

$y = \log_2 x$ を（ア．①または⑤）で移動し、（イ．④）で移動すると

$y = 2^{-2x}$ となります。

(b)

【方針】

通過領域の問題では、①1 文字固定法と②逆手流の 2 通りの考え方があります。この問題では、x を固定し a を変化させるとあるので①1 文字固定法を利用します。

合成関数 $y = f\left(g(x)\right) = 2^{-2g(x)}$ の式変形は、先に$g(x)$ を底が 2 の対数関数で表しておきます。そうすると、原則の形となり y は 2 次関数になることがわかります。特に、x を固定し a を変化させるので、y は a についての 2 次関数であり、グラフから y の取り得る範囲を考えます。

対数関数の真数条件に注意しましょう。

【解説】

まず、$g(x)$ を対数の性質を使って式変形した後に、合成関数 $f\left(g(x)\right)$ を求めます。

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \log_4\left(\frac{1}{a-x}\right) - \log_4(x-2a+6)\\
&= \log_4\frac{1}{(a-x)(x-2a+6)}\\
&= -\frac{\log_2(a-x)(x-2a+6)}{\log_2 4}\\
&= -\frac{1}{2}\log_2\log_2(a-x)(x-2a+6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= f\left(g(x)\right)\\
&= 2^{-2g(x)}\\
&= 2^{\log_2(a-x)(x-2a+6)}\\
&= (a-x)(x-2a+6)
\end{aligned}
$$

$x = x_0(> 0)$ と x の値を固定し、a の値を変化させて、y の値の取り得る範囲を求めます。

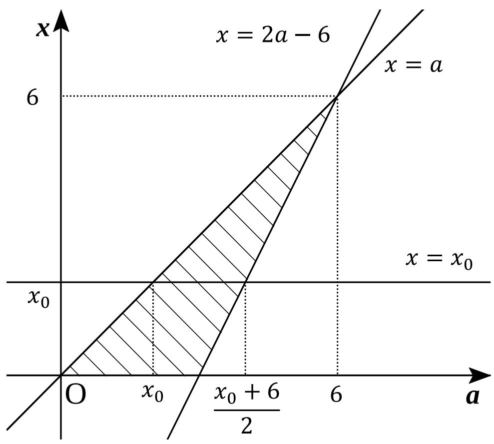
つまり、y を a の関数とみて

$$
\begin{aligned}
y &= (a-x_0)(x_0-2a+6)\\
&= -2(a-x_0)\left(a-\frac{x_0+6}{2}\right)
\end{aligned}
$$

また、真数条件より

$$a - x_0 > 0\,, x_0 - 2a + 6 > 0$$

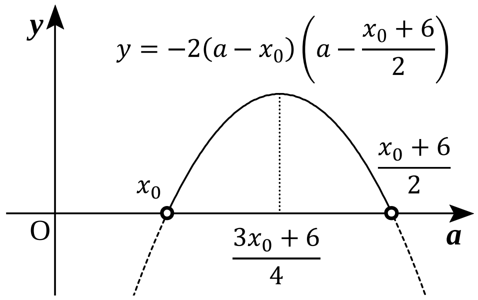
$$\Leftrightarrow x_0 < a < \frac{x_0}{2} + 3$$



真数条件と$x > 0, 0 < a < 6$が表す領域

グラフより y は頂点で最大値をとります。

つまり、$a=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{x_0+6}{2}\right)=\frac{3}{4}x_0+\frac{3}{2}$ のとき



$$y=-2\left(\frac{3}{4}x_0+\frac{3}{2}-x_0\right)\left(\frac{3}{4}x_0+\frac{3}{2}-\frac{x_0+6}{2}\right)$$

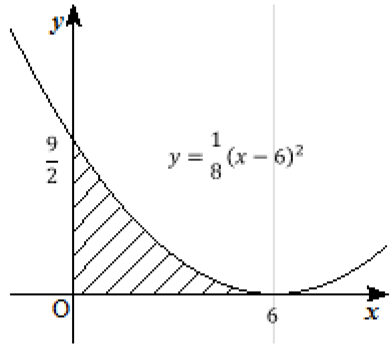
$$=-2\left(-\frac{1}{4}x_0+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}x_0-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{8}(x_0-6)(x_0-6)=\frac{1}{8}(x_0-6)^2$$

よって

$$0<y\leqq\frac{1}{8}(x_0-6)^2$$

次に、x を$0<x<6$ の範囲で、動かせば領域 D が求められ



$$y=\frac{1}{8}(x-6)^2=\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$$

より

領域D は x 軸、y 軸および曲線 $\underline{y=\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}}$ で囲まれた部分となります。

また、領域D の面積は

$$\int_0^6\frac{1}{8}(x-6)^2\,dx=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{3}(x-6)^3\right]_0^6=\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}\times6^3=\underline{9}$$

(c)

【方針】

方程式とグラフはとても相性がよく、方程式の問題をグラフを使って解いたり、グラフの問題を方程式を使って解いたります。今回は、与えられた 2 つの関数のグラフが、2 個の共有点を持つように a の範囲を求めるので、方程式の解が 2 個持つように a の範囲を求めればよいことになります。

【解説】

$y=g(x)$ と $y=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{5-x}{2}\right)$ のグラフが共有点を 2 個持つには、

方程式 $g(x)=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{5-x}{2}\right)$ が異なる実数解を 2 個持てばよいことを利用します。

$g(x)=\log_4\left(\dfrac{1}{a-x}\right)-\log_4(x-2a+6)$ より

$$\log_4\left(\frac{1}{a-x}\right)-\log_4(x-2a+6)=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{5-x}{2}\right)$$

$$\log_4\frac{1}{(a-x)(x-2a+6)}=\frac{\log_4\left(\frac{5-x}{2}\right)}{\log_4\frac{1}{4}}$$

$$-\log_4(a-x)(x-2a+6)=-\log_4\left(\frac{5-x}{2}\right)$$

$$(a-x)(x-2a+6)=\frac{5-x}{2}\cdots①$$

また、真数条件と$x>0$から

$$\begin{cases}2a-6<x<a\cdots②\\ \quad 0<x<5\cdots③\end{cases}$$

よって、①②③を満たす実数xが2個存在するようなaの値の範囲を求めることになります。

ここで、③より①の右辺の値は正。従って左辺の値も正になります。このことから②が得られるので、①と③の条件だけでよいことになります。

①を整理して

$$2(a-x)(x-2a+6)=5-x$$
$$2x^2+(11-6a)x+4a^2-12a+5=0$$

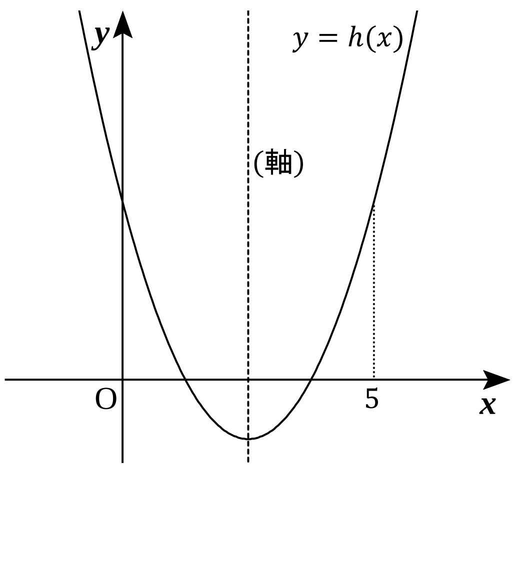
この2次方程式が、$0<x<5$で異なる2つの実数解を持つには

$$h(x)=2x^2+(11-6a)x+4a^2-12a+5$$

のグラフを考えることにより

$$\begin{cases}h(0)>0,\ \ h(5)>0\\ \quad 0<(\text{軸})<5\\ \quad (\text{判別式})>0\end{cases}$$

を満たせばよいことになります。



$h(0)>0$ より

$$4a^2-12a+5>0$$
$$(2a-1)(2a-5)>0$$
$$a<\frac{1}{2},\ \ a>\frac{5}{2}\cdots④$$

$h(5) > 0$ より

$$50 + (11 - 6a) \times 5 + 4a^2 - 12a + 5 > 0$$

$$4a^2 - 42a + 110 > 0$$

$$2a^2 - 21a + 55 > 0$$

$$(2a - 11)(a - 5) > 0$$

$$a < 5,\ \ a > \frac{11}{2} \cdots ⑤$$

(判別式) > 0 より

$$(11 - 6a)^2 - 4 \times 2 \times (4a^2 - 12a + 5) > 0$$

$$4a^2 - 36a + 81 > 0$$

$$(2a - 9)^2 > 0$$

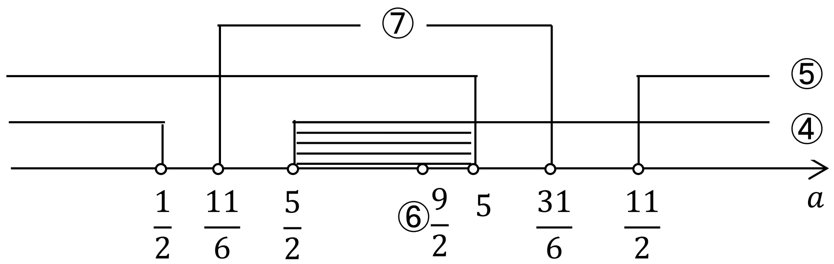
$$a \neq \frac{9}{2} \cdots ⑥$$

$0 <$ (軸) < 5 より

$$0 < -\frac{11 - 6a}{4} < 5$$

$$0 < 6a - 11 < 20$$

$$\frac{11}{6} < a < \frac{31}{6} \cdots ⑦$$



共通範囲から

$$\underline{\frac{5}{2} < a < \frac{9}{2},\ \ \frac{9}{2} < a < 5}$$

④微積分

○原則

1． ◆定積分と微分

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)\ (a\text{は定数})$$

２．◆はさみうちの原理

a の近くで不等式、$f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ が成り立ち、かつ

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \alpha$$

ならば

$$\lim_{x\to a} g(x) = \alpha$$

３．◆無限等比級数の和

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}\ (a \neq 0)$について

Ⅰ）$|r| < 1$ のとき収束して、その和は $\dfrac{a}{1-r}$

Ⅱ）$|r| \geqq 1$ のとき発散。

○解答・解説

(a)

【方針】

誘導が付いているので、それに従います。与えられた等式の両辺を微分するには、左辺は原則を用い、右辺は積の微分法です。

得られた等式は、x についての恒等式なので各関数の係数が等しくなり、A と B の連立方程式が立てられます。最後の極限の問題は、$x \to \infty$ のとき $\sin x, \cos x$ は振動するので、$|\sin x| \leqq 1,\ |\cos x| \leqq 1$ を利用して、はさみうちの原理に持ち込みます。そのときに三角不等式 $|x+y| \leqq |x| + |y|$ を利用します。

【解説】

$$\int_0^x e^{-3t}\sin 4t\,dt = e^{-3x}(A\sin 4x + B\cos 4t) + C \cdots (*)$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-3t}\sin 4t\,dt = -3e^{-3x}(A\sin 4x + B\cos 4t) + e^{-3x}(4A\cos 4x - 4B\sin 4t)$$

$$e^{-3x}\sin 4x = e^{-3x}\{-(3A+4B)\sin 4x + (4A-3B)\cos 4t\}$$

x についての恒等式なので

$$\begin{cases} -(3A+4B)=1 \\ (4A-3B)=0 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて

$$\underline{A=-\frac{3}{25},\ B=-\frac{4}{25}}$$

また、$x=0$ を$(*)$ に代入して

$$0=e^0(A\sin 0 + B\cos 0)+C$$

$$\mathrm{C}=-\mathrm{B}=\underline{\frac{4}{25}}$$

次に

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-3t}\sin 4t\,dt = \lim_{x\to\infty}\{e^{-3x}(A\sin 4x + B\cos 4t)+C\}$$

ここで

$$\begin{aligned} |e^{-3x}(A\sin 4x + B\cos 4t)| &= |e^{-3x}||A\sin 4x + B\cos 4t| \\ &\leqq |e^{-3x}|(|A\sin 4x| + |B\cos 4t|) \\ &\leqq |e^{-3x}|(|A|+|B|)\ \ (\because\ |\sin 4x|\leqq 1、|\cos 4x|\leqq 1) \end{aligned}$$

であり

$$\lim_{x\to\infty}|e^{-3x}|(|A|+|B|)=0$$

なので

$$\lim_{x\to\infty}|e^{-3x}(A\sin 4x + B\cos 4t)|=0$$

従って

$$\lim_{x\to\infty}\{e^{-3x}(A\sin 4x + B\cos 4t)+C\}=C=\underline{\frac{4}{25}}$$

(b)

【方針】

I_n は公比 e^{α} の等比数列なので、$I_{n+1}=e^{\alpha}I_n$ が成り立ちます。この漸化式を導いて公比を求めます。それには、I_{n+1} から式を立て、それを I_n で表します。このとき積分

区間の違いに着目して、置換積分することで積分区間をずらします。

【解説】

与式より

$$I_{n+1} = \int_{\frac{n}{4}\pi}^{\frac{n+1}{4}\pi} e^{-3t}\,|\sin 4t|dt$$

t	$\frac{n}{4}\pi$	$\to$	$\frac{n+1}{4}\pi$
s	$\frac{n-1}{4}\pi$	$\to$	$\frac{n}{4}\pi$

$s = t - \dfrac{\pi}{4}$ として、$\dfrac{ds}{dt} = 1$

$$I_{n+1} = \int_{\frac{n-1}{4}\pi}^{\frac{n}{4}\pi} e^{-3\left(s+\frac{\pi}{4}\right)}\left|\sin 4\left(s + \frac{\pi}{4}\right)\right| ds$$

$$= e^{-\frac{3}{4}\pi}\int_{\frac{n-1}{4}\pi}^{\frac{n}{4}\pi} e^{-3s}|\sin(4s+\pi)|ds$$

$$= e^{-\frac{3}{4}\pi}\int_{\frac{n-1}{4}\pi}^{\frac{n}{4}\pi} e^{-3s}|-\sin 4s|ds = e^{-\frac{3}{4}\pi}\int_{\frac{n-1}{4}\pi}^{\frac{n}{4}\pi} e^{-3s}|\sin 4s|ds$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi} I_n$$

よって、$\alpha = \underline{-\dfrac{3}{4}\pi}$

数列 I_n の公比$e^{-\frac{3}{4}\pi}$ は、$0 < e^{-\frac{3}{4}\pi} < 1$ を満たすので、無限等比級数は収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n = \frac{I_1}{1 - e^{\alpha}}$$

ここで

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-3x}|\sin 4t|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-3t}\sin 4t\,dt$$

$$= e^{-\frac{3}{4}\pi}(A\sin\pi + B\cos\pi) + C = -Be^{\alpha} + C = C(1 + e^{\alpha})$$

従って

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n = \frac{I_1}{1 - e^{\alpha}} = C \times \underline{\frac{1 + e^{\alpha}}{1 - e^{\alpha}}}$$

-----参考-----

公比を求めるのに、I_1，I_2 を計算して、$\dfrac{I_2}{I_1}$ を求める方法もあります。

上の計算から、$I_1 = C\left(1 + e^{-\frac{3}{4}\pi}\right)$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{4}} e^{-3x}|\sin 4t|\,dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-3x}(-\sin 4t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-3x}(-\sin 4t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-3x}(-\sin 4t)\,dt$$

$$= -e^{-\frac{3}{2}\pi}(A\sin 2\pi + B\cos 2\pi) - C + e^{-\frac{3}{4}\pi}(A\sin\pi + B\cos\pi) + \mathrm{C}$$

$$= -Be^{-\frac{3}{2}\pi} - Be^{-\frac{3}{4}\pi} = -Be^{-\frac{3}{4}\pi}\left(e^{-\frac{3}{4}\pi} + 1\right)$$

$$= Ce^{-\frac{3}{4}\pi}\left(1 + e^{-\frac{3}{4}\pi}\right)$$

よって

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{Ce^{-\frac{3}{4}\pi}\left(1 + e^{-\frac{3}{4}\pi}\right)}{C\left(1 + e^{-\frac{3}{4}\pi}\right)} = e^{-\frac{3}{4}\pi}$$

$$\therefore \underline{\alpha = -\frac{3}{4}\pi}$$