Q.(標準問題精講数学 2B P171 例題 75)
0 と π を定義域からのぞいておくなどの処理が難しく、習得が大変でした。

A. 三角方程式を解くとき、角度が揃っていないとパラメータ(この問題では x)によって各項がバラバラに動いてしまい、解きづらくなります。そこでまずは式に現れる**角度を出来る限り揃え**、変数を統一させることを考えます。その際には 2 倍角や 3 倍角の公式を用いましょう。
また与えられた方程式にはaが含まれており、この値によってxのもつ解の個数が変化することが推測できるので、**aの値によって場合分けが生じることを頭に入れながら**解いていきます。

$\sin 3x - 2\sin 2x + (2-a^2)\sin x = 0$
この式に現れる角度をxに統一します。
sin の 3 倍角の公式は$\sin 3x = 4\sin^3 x$と sin の 2 倍角の公式$\sin 2x = 2\sin x\cos x$を方程式に代入します。
$(与式) \Leftrightarrow (3\sin x - 4\sin^3 x) - 2(2\sin x\cos x) + (2-a^2)\sin x = 0$
$\Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x - 4\sin x\cos x + (2-a^2)\sin x = 0$

いまは方程式を解こうとしているので、2 次方程式の$(x-a)(x-b)=0$のような**積の形を作ってあげる**ことが必要になります。
そこで各辺を共通項$\sin x$でくくります。
$\Leftrightarrow \sin x\{3 - 4\sin^2 x - 4\cos x + (2-a^2)\} = 0$

{}内について sin と cos が混在しています。$\cos x$を sin には変換しづらいので、$\sin^2 x$を cos に変換し{}内を cos に統一します。
$\Leftrightarrow \sin x\{3 - 4(1-\cos^2 x) - 4\cos x + (2-a^2)\} = 0$
$\Leftrightarrow \sin x(4\cos^2 x - 4\cos x - a^2 + 1) = 0$

これで式変形が終わりました。この方程式が成り立つのは
$$\sin x = 0 \text{—①または } 4\cos^2 x - 4\cos x - a^2 + 1 = 0 \text{—②}$$
のときです。$0 \leqq x < 2\pi$なので
① $\Leftrightarrow x = 0, \pi$と$a$に関わらず解を 2 つ持ちます。
②は$\cos x$についての 2 次方程式です。2 次方程式と捉えやすくするために$t = \cos x$と置きかえます。xの範囲からtの範囲は$-1 \leqq t \leqq 1$となります。
② $\Leftrightarrow 4t^2 - 4t - a^2 + 1 = 0$これが$-1 \leqq t \leqq 1$の範囲でもつ解の個数を調べればよいのですが、**①の解との重複に注意する必要があります。**

例えば$a=1$とすると

② $\Leftrightarrow 4\cos^2 x-4\cos x=0 \Leftrightarrow 4\cos x(\cos x-1)=0 \Leftrightarrow \cos x=0,1$

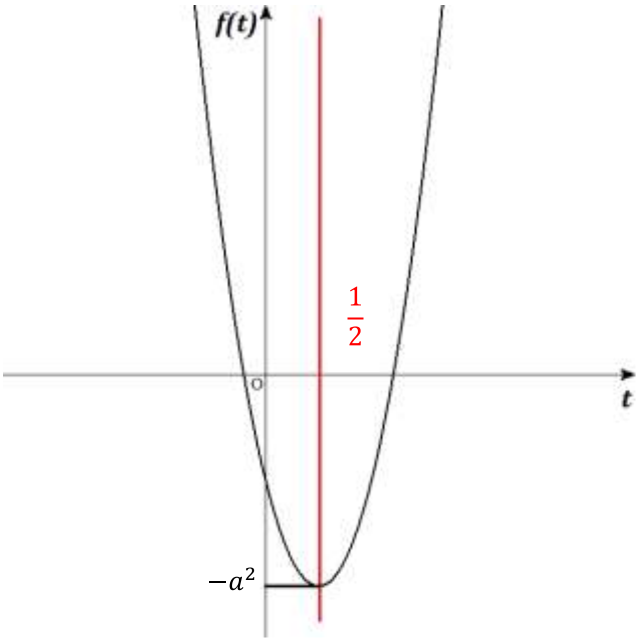
となって$x=0,\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$となり、$x=0$が①の解と重複します。①②の解の個数の合計は$1+3=4$個ではなく、$x=0$が重複していることを考慮して$4-1=3$個が正しいです。

このように②について$0\leqq x<2\pi$の範囲で考えると①の解との重複を気にしなければいけません。そこで**②の解の個数を調べる際にはあらかじめ$\boldsymbol{x=0,\pi}$を除いた範囲で考えると、①との重複を気にせずに済みます。**

それでは② $\Leftrightarrow$ $4\cos^2 x-4\cos x-a^2+1=0$ が $0<x<\pi,\pi<x<2\pi$の範囲で解を持つ個数を調べます。これを$\cos x=t$で置き換えて

$4t^2-4t-a^2+1=0$ が $-1<t<1$($x=0,\pi$を除外したので**$\boldsymbol{t=\pm 1}$は除外！**)の範囲でもつtの解の個数を調べます。

ここで 2 次方程式の解の個数問題に変わります。**グラフを利用**しましょう。



$f(t)=4t^2-4t-a^2+1$

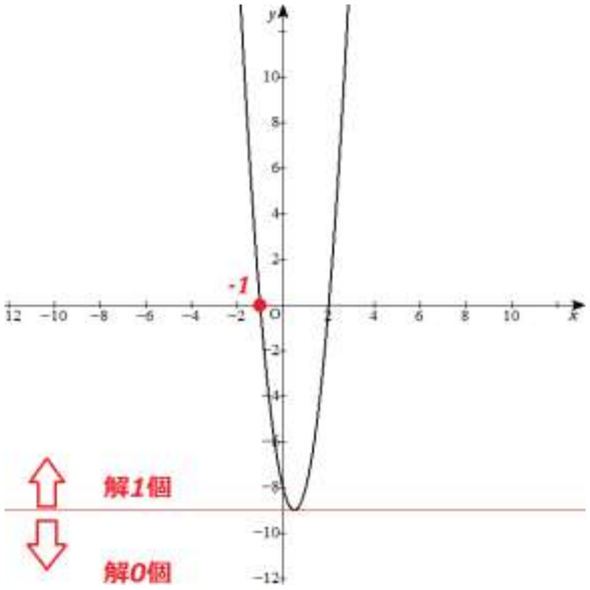
$(-1<t<1)$

とします。$f(t)=0$が$-1<t<1$でもつ解の個数$\Leftrightarrow f(t)$とt軸の$-1<t<1$での交点の数と置き換えられます。$f(t)$は下に凸の放物線で頂点は

$$f(t)=4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-a^2 \text{より}$$

$\left(\frac{1}{2},-a^2\right)$です。

この放物線はaの値によって**軸上を上下に移動する**というイメージを持ってください。放物線が上のほうにあればそれだけt軸と$-1<t<1$で交点を持ちやすくなります。

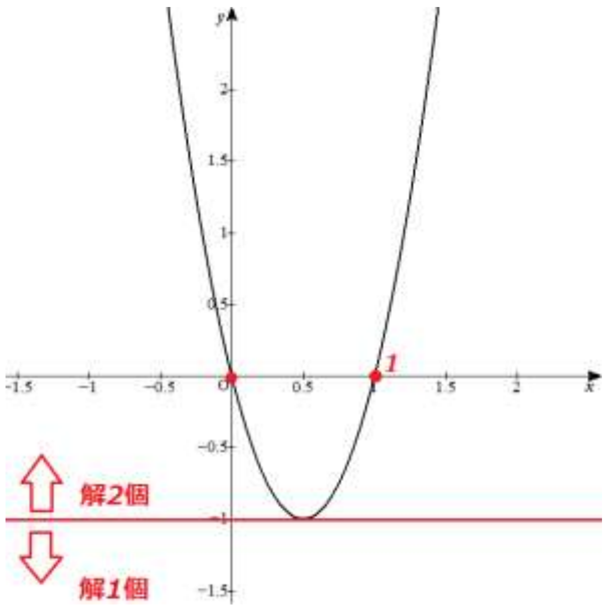


(ⅰ)$t=-1$でt軸と交わるとき

$$f(-1)=0 \Leftrightarrow -a^2+9=0$$
$$\Leftrightarrow -a^2=\mathbf{-9}$$

このとき$-1<t<1$での解は 0 個で、これより放物線が上にあれば 1 個、これより下にあれば 0 個です。

←解 0 個



(ⅱ)$t=1$でt軸と交わるとき

$$f(1)=0 \Leftrightarrow -a^2+1=0$$
$$\Leftrightarrow -a^2=\mathbf{-1}$$

このとき$-1<t<1$での解は 1 個で、これより放物線が上にあれば 2 個となります。

←解 1 個

(ⅰ)(ⅱ)より、頂点の y 座標$-a^2$の値によって$-1<t<1$におけるtの解の個数が以下のようになります。

$$\begin{cases} -a^2 \leqq -9 \cdot\cdot\cdot 0\text{ 個} \\ -9<-a^2 \leqq -1 \cdot\cdot\cdot 1\text{ 個} \\ -1<-a^2<0 \cdot\cdot\cdot 2\text{ 個} \qquad (<0\text{は}a>0\text{だから}) \end{cases}$$

従って、$a > 0$から

$$\begin{cases} a \geqq 3 \cdot\cdot\cdot 0\text{ 個} \\ 1 \leqq a < 3 \cdot\cdot\cdot 1\text{ 個} \\ 0 < a < 1 \cdot\cdot\cdot 2\text{ 個} \end{cases}$$

となります。

いま求めたのは***t*の解の個数**であることに注意してください。$t = \cos x$ですから$\mathbf{-1 < t < 1}$の範囲では 1 つのtに対して 2 つのxが存在します(例:t=$\frac{1}{2}$のとき、$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$)。つまり$x$の解の個数は$t$のときの **2 倍**となるので、

$$\begin{cases} a \geqq 3 \cdot\cdot\cdot \mathbf{0個} \\ 1 \leqq a < 3 \cdot\cdot\cdot \mathbf{2個} \\ 0 < a < 1 \cdot\cdot\cdot \mathbf{4個} \end{cases}$$

となります。

以上より①②のxの解の個数を合計すると、①はaによらず常に 2 個なので、

$$\begin{cases} a \geqq 3 \cdot\cdot\cdot \mathbf{2個} \\ 1 \leqq a < 3 \cdot\cdot\cdot \mathbf{4個} \\ 0 < a < 1 \cdot\cdot\cdot \mathbf{6個} \end{cases}$$

このように三角方程式の問題はまず式変形(角度の統一、積の形など)によって変数を 1 つにすることで 2 次方程式の問題にまで落とし込みます。
ただし文字を置き換えた後の解の個数については、t と x が必ずしも 1 対 1 対応ではないことに注意しましょう。