

# 数学III 基礎問題精講 解説

P23 | 演習問題11

## ポイント

- ① 極座標は、原点（極）からの距離 $r$ と、角度 $\theta$ を用いて表すもの
- ② 極方程式は、その $r$ と $\theta$ の関係を表したもの。条件を立式すると求まります
- ③ 「最大」や「最小」は、どう言い換えるかが大事（数学は「言い換え」が大事）

## 解説

極座標  $(1, \pi)$  を見た瞬間に「生理的に無理」と感じてしまう人はたくさんいます。  
しかし、極座標  $(1, \pi)$  が表していることはとてもシンプルです。

「長さ1の線分を、原点周りに  $\pi$  だけを回転させた先」

の座標です。

他にも  $(2, \pi/3)$  という極座標があったら、それは、

「長さ2の線分を、原点周りに  $\pi/3$  だけ回転させた先」

の座標です。

また、点Pが  $(r, \theta)$  と表されているとき、この点Pが

「長さ $r$ の線分を、原点周りに  $\theta$  だけ回転させた先」

の座標を表しています。

\*\*\*

さて、とある極座標上の動点Pを  $(r, \theta)$  とおきます。これが、とある条件下（PAの長さがPOの長さrより、定数aだけ長い）で、動いていますので、この条件を立式すれば、 $r$ と $\theta$ の関係が求まります。この「 $r$ と $\theta$ の関係」こそが、極方程式です。

では、点Pが満たしている条件「PAの長さがPOの長さrより、定数aだけ長い」を、式に直していきましょう。

で、結論からいうと、問題文中にある図を見て気づいて欲しいのですが、3辺の長さと1角がわかっているので、

「余弦定理を使えば関係式が出せる！」

となります。よって、解答のようになります。

(2)については、

「PAが最小」 $\Leftrightarrow$ 「 $r+a$ が最小」

なのですが、 $a$ は定数なので、

「PAが最小」 $\Leftrightarrow$ 「 $r+a$ が最小」 $\Leftrightarrow$ 「 $r$ が最小」

となります。ここで、(1)で求めた式を使えばいいことに気づきます。

$$2r(a - \cos\theta) = 1 - a^2$$

$\Leftrightarrow$

$$r = \frac{1 - a^2}{2(a - \cos\theta)} \quad (\text{ただし、}\cos\theta \neq a\text{のとき})$$

と変形でき、分子  $(1 - a^2)$  はやっぱり定数なので、分母  $(a - \cos\theta)$  が最大になればよさそうです。ということで、

「PAが最小」 $\Leftrightarrow$ 「 $r+a$ が最小」 $\Leftrightarrow$ 「 $r$ が最小」 $\Leftrightarrow$ 「 $a - \cos\theta$ が最大」

と言い換えることができます。

最後にもうひと変形。やっぱり $a$ は定数なので、 $a - \cos \theta$ が最大になるには、 $-\cos \theta$ が最大になればいい。つまり、 $\cos \theta$ が最小になれば良い（ $\theta = \pi$ ）ですね。まとめると、

$$\text{「PAが最小」} \Leftrightarrow \text{「}r+a\text{が最小」} \Leftrightarrow \text{「}r\text{が最小」} \Leftrightarrow \text{「}a - \cos \theta\text{が最大」} \Leftrightarrow \text{「}\theta = \pi\text{」}$$

ということです。

最終的に点Pの座標を求めたい、つまり $r$ と $\theta$ を求めたいので、あとは $r$ だけ。

$$2r(a - \cos \theta) = 1 - a^2$$

に $\theta = \pi$ を代入して、

$$r = \frac{1 - a}{2}$$

となるのです。わかりましたでしょうか？