日医 2015 数学
略解

I

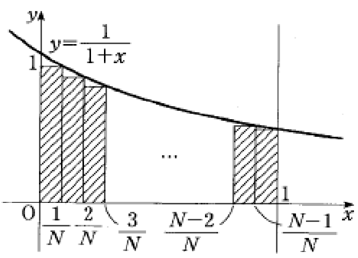
問 1 (1) $p_{n+1}=-\frac{1}{8}p_n+\frac{3}{8}$　(2)$p_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{8}\right)^n$ (3)$p=\frac{1}{3}$ (4)$n=16$

問 2(1)$(x,y)=(3,3)$で最大値$\frac{1}{4}$をとり、$(x,y)=(4,1)$で最小値$\frac{2}{25}$をとる。

(2)最大値は $\frac{629}{50}$,最小値は$\frac{17}{4}$である。

II　問 1.

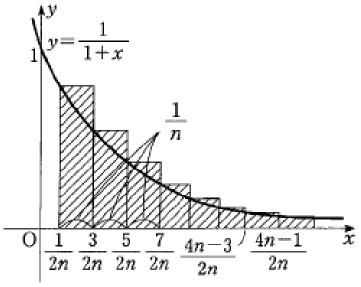
$$与式=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{2}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\frac{2n}{2}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{2n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{2n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{2n}{2n}}\right)$$



ここで，$2n=N$ とおくと

$$与式=\lim_{N\to\infty}2\cdot\frac{1}{N}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{N}}+\frac{1}{1+\frac{2}{N}}+\frac{1}{1+\frac{3}{N}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{N}{N}}\right)$$
$$=\lim_{N\to\infty}2\cdot\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1+\frac{k}{N}}$$
$$=2\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=2\Big[\log|1+x|\Big]_0^1=2\log 2\quad\cdots\cdots(答)$$

問 2．$$与式=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\frac{1}{n+\frac{5}{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\frac{4n-1}{2}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{2n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{4n-1}{2n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{2k-1}{2n}}$$
$$=\int_0^2\frac{1}{1+x}dx=\Big[\log|x+1|\Big]_0^2$$
$$=\log 3\quad\cdots\cdots(答)$$



問３．与式の k 番目の項は $a_k=\left(1+\sin\dfrac{(n+k-1)\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{(n+k-1)\pi}{n}}$ とおける。

$(k=1,\ 2,\ \cdots)$

$$P_n=\left\{\left(1+\sin\frac{n\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{n}{n}\pi}\cdot\left(1+\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{n+1}{n}\pi}\cdot\ \cdots\ \cdot\left(1+\sin\frac{(n+n)\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{n+n}{n}\pi}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

とおくと，$P_n=(a_1\cdot a_2\cdot\ \cdots\ \cdot a_{n+1})^{\frac{1}{n}}$ となり

$$\begin{aligned}
\log P_n&=\log(a_1\cdot a_2\cdot\ \cdots\ \cdot a_{n+1})^{\frac{1}{n}}\\
&=\frac{1}{n}(\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_{n+1})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n+1}\log a_k\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n+1}\sin\frac{(n+k-1)\pi}{n}\cdot\log\left(1+\sin\frac{(n+k-1)\pi}{2n}\right)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{(n+k)\pi}{n}\cdot\log\left(1+\sin\frac{(n+k)\pi}{2n}\right)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\pi+\frac{k}{n}\pi\right)\log\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k}{2n}\pi\right)\right)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(-\sin\frac{k}{n}\pi\right)\log\left(1+\cos\frac{k}{2n}\pi\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\log P_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(-\sin\frac{k}{n}\pi\right)\log\left(1+\cos\frac{k}{2n}\pi\right)\quad(\because\quad \sin 0=0)\\
&=\int_0^1(-\sin\pi x)\log\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)dx\\
&=\left[\frac{1}{\pi}\cos\pi x\log\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1\quad-\int_0^1\frac{1}{\pi}\cos\pi x\frac{-\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}dx\\
&=-\frac{1}{\pi}\log 2-\int_0^1\frac{1}{\pi}\cos\pi x\frac{-\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}dx
\end{aligned}$$

ここで，$t=\cos\dfrac{\pi}{2}x$ とおくと　$\dfrac{dt}{dx}=-\sin\dfrac{\pi}{2}x\cdot\dfrac{\pi}{2}$

x	$0\longrightarrow 1$
t	$1\longrightarrow 0$

また　$\cos\pi x=2\cos^2\dfrac{\pi}{2}x-1=2t^2-1$

であるから

$$\int_0^1\frac{1}{\pi}\cos\pi x\frac{-\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}dx=\int_1^0\frac{1}{\pi}(2t^2-1)\frac{dt}{1+t}$$

$$=\int_1^0\frac{1}{\pi}\left(2t-2+\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{\pi}\Big[t^2-2t+\log|t+1|\Big]_1^0$$

$$=\frac{1}{\pi}(-1+2-\log 2)=\frac{1}{\pi}(1-\log 2)$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\log P_n=-\frac{1}{\pi}\log 2-\frac{1}{\pi}(1-\log 2)=-\frac{1}{\pi}\qquad=\log e^{-\frac{1}{\pi}}$$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}P_n=e^{-\frac{1}{\pi}}$　……(答)

Ⅲ

問 1．$Vn=\left(\frac{1}{30}n^5+\frac{4}{3}n^2m^3+\frac{4}{15}m^3\right)\pi$

問 2. $Wn=\frac{\pi(n+m)^5}{30\sqrt{1+m^2}}$　問 3. $\lim_{n\to\infty}\frac{Vn}{Wn}=\sqrt{1+m^2}$

配点

〔Ⅰ〕問 1（1）～（3）各 3 点　（4）5 点

問 2 最大値、最小値、(x,y) の値で各 3 点（3×3＋5＋3×6）

〔Ⅱ〕問 1　8 点　問 2　12 点　問 3　14 点（8＋12＋14）

〔Ⅲ〕問 1　14 点　問 2　14 点　問 3　6 点（14＋14＋6）

日本医科大学入試

2015年数学

解答・解説編

①小問集合

○原則

１．◆漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ 型

特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ の解 α を用いて

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$$

と式変形でき、数列$\{a_n - \alpha\}$ は初項$a_1 - \alpha$、公比 p の等比数列なので

$$a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha$$

２．◆累乗の極限

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} +\infty\ (r > 1) \\ 1\ (r = 1) \\ 0(|r| < 1) \\ \text{振動}\ (r \leqq -1) \end{cases}$$

３．◆領域と最大値・最小値

点 $(x,\ y)$ が領域 D 内の点であるとき、$f(x,\ y)$ の最大値・最小値を求めるには曲線 $f(x,\ y) = k$ と領域 D が共有点を持つように k の値の取り得る範囲を考えます。最大値と最小値は、図から読み取ることができます。

○解答・解説

(問 1)

【方針】

(1) $n+1$ 秒後に、P が A にいる為には、n 秒後の P の位置から$n+1$ 秒後にどのように推移したらよいのか考えると、n 秒後に A にいて、そのまま A にいる場合か n 秒後に B もしくは C にいて、$n+1$ 秒後に、A に移動する場合が考えられます。

(2) (1)で得た漸化式を解きます。$a_{n+1} = pa_n + q$ 型なので原則に従い解きます。また、次の点に注意します。0 秒のとき P は A にいるとあるので、$n = 0, 1, 2, \cdots$ と番号は 0 から始まります。

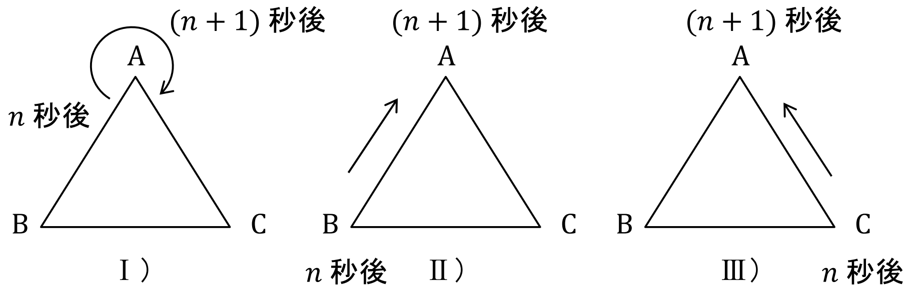
(3) (2)で得た p_n の極限を求めます。

(4) (2)(3)から$|p_n - p|$ を求め、不等式の両辺常用対数をとります。すると、n についての 1 次不等式が得られます。

【解説】

$n+1$ 秒後に、P が A にいるには、次のような場合が考えられます。

Ⅰ）n 秒後に P が A にいて $n+1$ 秒後もそのまま A にいる場合
Ⅱ）n 秒後に P が B にいて $n+1$ 秒後、A に移動する場合
Ⅲ）n 秒後に P が C にいて $n+1$ 秒後、A に移動する場合



それぞれの場合について、確率を求めます。

Ⅰ）のとき

n 秒後に P が A にいる確率は、p_n

$n+1$ 秒後にそのまま A にいる確率は、$\frac{1}{4}$

よって、$p_n \times \frac{1}{4}$

Ⅱ）のとき

n 秒後に P が B にいる確率は、n 秒後に P が C にいる確率と等しく

$\frac{1}{2}(1-p_n)$

$n+1$ 秒後に A に移動する確率は、$\frac{3}{8}$

よって、$\frac{1}{2}(1-p_n) \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}(1-p_n)$

Ⅲ）のとき

n 秒後に P が C にいる確率は、$\frac{1}{2}(1-p_n)$

$n+1$ 秒後に A に移動する確率は、$\frac{3}{8}$

よって、$\frac{1}{2}(1-p_n) \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}(1-p_n)$

Ⅰ）Ⅱ）Ⅲ）より

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + 2 \times \frac{3}{16}(1 - p_n)$$
$$= -\frac{1}{8}p_n + \frac{3}{8}$$

(2)　(1)より

$$p_{n+1} = -\frac{1}{8}p_n + \frac{3}{8}$$
$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{8}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

数列$\left\{p_n - \frac{1}{3}\right\}$は、初項$p_0 - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$、公比$-\frac{1}{8}$の等比数列なので

$$p_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)^n$$
$$p_n = \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)^n + \frac{1}{3}\quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

(3)　(2)より

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)^n + \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$$

(4)　(2)(3)より

$$|p_n - p| = \left|\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)^n\right| = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^n$$

よって

$$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^n < 5^{-20}$$
$$2^{-3n+1} < 3\cdot\left(\frac{10}{2}\right)^{-20}$$
$$2^{-3n+1}\cdot 2^{-20} < 3\cdot 10^{-20}$$
$$2^{-3n-19} < 3\cdot 10^{-20}$$

両辺、常用対数をとると

$$\log_{10} 2^{-3n-19} < \log_{10} 3\cdot 10^{-20}$$
$$(-3n - 19)\log_{10} 2 < \log_{10} 3 - 20$$
$$3n\log_{10} 2 > 20 - \log_{10} 3 - 19\log_{10} 2$$

$$n > \frac{20 - \log_{10} 3}{3\log_{10} 2} - \frac{19}{3}$$
$$= \frac{20 - 0.4771}{3 \times 0.3010} - \frac{19}{3} = 15.29\cdots$$

n は整数なので、最小の n は、$\underline{n = 16}$

問 2

【方針】

(1) $\dfrac{y+1}{(x+1)^2} = k$ とおくと、$y = k(x+1)^2 - 1$ となり、この放物線と領域 D が共有点を持つときの k の最大値と最小値を図より読み取ります。

　この放物線は頂点 $(-1, -1)$ で下に凸なグラフになります。k の値によってグラフの開き具合が変化することから、k の最大値はグラフの開きが一番狭いときであり、k の最小値は一番広いときとなります。

(2) 一見すると、相加平均・相乗平均の関係を使いたくなります。しかし、それでは最小値しか求められません。実際には等号成立しないので最小値も求められません。従って、微分して増減表から最大値・最小値を求めます。このとき(1)から得られる定義域に注意します。

【解説】

(1) 3 つの不等式が表す領域 D を図示すると、図の斜線部と境界部分になり、

$x \geqq 2,\ y \geqq 0$ です。

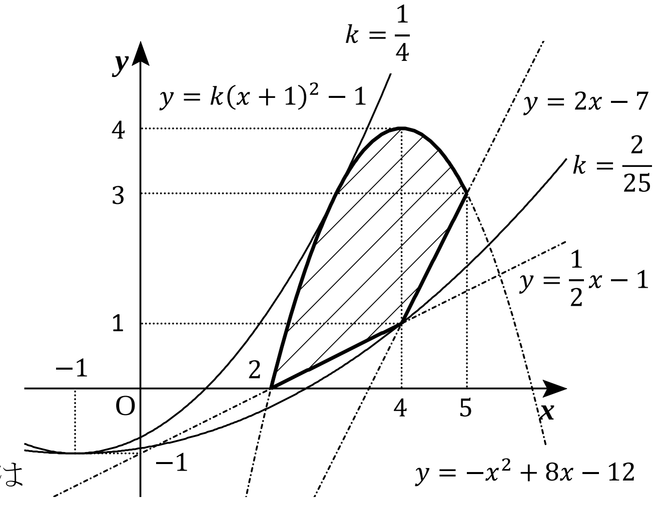
$\dfrac{y+1}{(x+1)^2} = k$ とおくと、

$x + 1 > 0,\ \ y + 1 > 0$ なので $k > 0$

また、$y = k(x+1)^2 - 1$ として

　領域 D と放物線 $y = k(x+1)^2 - 1$ が共有点を持つときに、k の最大値と最小値を求めます。

　k は放物線のグラフの開き具合を表します。 k が最大値をとるのは、開きが具合が一番狭いとき、最小値をとるのは開き具合が一番広いときとなります。



開き具合が一番狭くなるのは、2 つの放物線 $y = k(x+1)^2 - 1$ と$y = -x^2 + 8x - 12$

が接するときです。それは、2 つの放物線の方程式を連立して得られる、x についての 2 次方程式

$$k(x+1)^2-1=-x^2+8x-12$$
$$\Leftrightarrow (k+1)x^2+2(k-4)x+k+11=0$$

が重解を持つときです。

判別式を D とすると $D=0$ となるので

$$\frac{D}{4}=(k-4)^2-(k+1)(k+11)=0$$
$$-8k+16-12k-11=0$$
$$-20k=-5$$
$$k=\frac{1}{4}$$

これは$k>0$ を満たすので解になり得ます。

またこのときの重解は

$$x=-\frac{k-4}{k+1}=-\frac{\frac{1}{4}-4}{\frac{1}{4}+1}=3$$

$$y=\frac{1}{4}(3+1)^2-1=3$$

2 次方程式$ax^2+bx+c=0$の解

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

重解は

$$x=\frac{-b}{2a}$$

従って、$(x,\ y)=(3,\ 3)$ のとき最大値は$\frac{1}{4}$です。

次に、開き具合が一番広くなるのは

放物線 $y=k(x+1)^2-1$ が点 $(4,\ 1)$ を通るときです。

$$1=k(4+1)^2-1$$
$$k=\frac{2}{25}$$

従って、$(x,\ y)=(4,\ 1)$ のとき最小値は$\frac{2}{25}$です。

(2)

$\frac{y+1}{(x+1)^2}=k$ とおくと、$\frac{y+1}{(x+1)^2}+\frac{(x+1)^2}{y+1}=k+\frac{1}{k}$

$f(k)=k+\frac{1}{k}$ とおいて

(1)より $\frac{2}{25}\leqq k\leqq\frac{1}{4}$ のときの $f(k)$ の最大値と最小値を求めます。

$$f'(k) = 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k+1)(k-1)}{k^2}$$

$$f\left(\frac{2}{25}\right) = \frac{2}{25} + \frac{25}{2} = \frac{629}{50}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{4}{1} = \frac{17}{4}$$

よって、最大値 $\frac{629}{50}$、最小値 $\frac{17}{4}$

k	$\frac{2}{25}$	$\cdots$	$\frac{1}{4}$
$f'(k)$		$-$	
$f(k)$	$\frac{629}{50}$	↘	$\frac{17}{4}$

②区分求積法

○原則

1．◆区分求積法

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

とくに、$a = 0,\ b = 1$のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

2．◆部分積分

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

3．◆置換積分

方法Ⅰ）$x = g(t)$ とおく。

$$\int f(x)dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}dt = \int f(g(t))g'(t)dt$$

方法Ⅱ）$g(x) = t$ とおく。

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)\frac{dt}{dx}dx = \int f(t)dt$$

○解答・解説

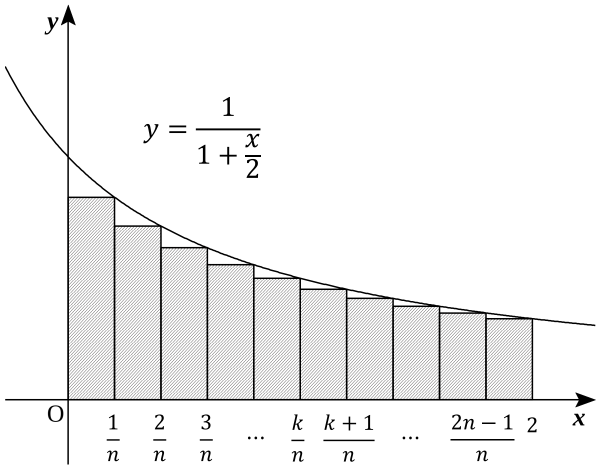
問 1

【方針】

区分求積法で極限を求めます。原則の基本形の式と問題から得られる式を比べると和が $2n$ まで足しているという点で違いがあり注意が必要です。

幅が $\dfrac{1}{n}$ の長方形 を $2n$ 個足しているので $\dfrac{1}{n}\times 2n=2$ から積分区間は$[0,\ 2]$ と考えます。

【解説】



$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{2}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+\frac{k}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)}$$

$$=\int_0^2\frac{1}{1+\frac{x}{2}}dx=2\int_0^2\frac{1}{x+2}dx$$

$$=2[\log|x+2|]_0^2$$

$$=2(\log 4-\log 2)=\underline{2\log 2}$$

-----参考-----

$N=2n$ とおいて原則の基本形に合わせます。

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{2n}}=\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1+\frac{k}{N}}$$

より

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{2}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{1+\frac{k}{N}}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = 2[\log|1+x|]_0^1 = \underline{2\log 2}$$

問 2

【方針】

問 1 と同様に、$2n$ 個の長方形を足しているので、積分区間は [0, 2] と考えます。またk 番目の長方形の高さを、$f\left(\frac{k}{n}\right)$ や$f\left(\frac{k-1}{n}\right)$ で表すことができません。そこで、求めたい長方形の面積の和を$f\left(\frac{k}{n}\right)$ や$f\left(\frac{k-1}{n}\right)$ を用いたもので上側からと下側からではさみます。

【解説】

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\frac{1}{n+\frac{5}{2}}+\cdots+\frac{2}{6n-1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+\frac{2k-1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{2k-1}{2n}}$$

ここで

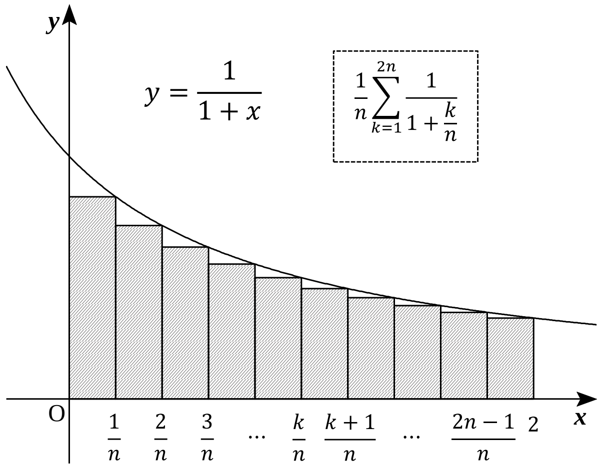
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{2k}{2n}} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{2k-1}{2n}} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{2(k-1)}{2n}}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{2k}{2n}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{1+x}dx$$

$$= [\log|1+x|]_0^2 = \log 3$$

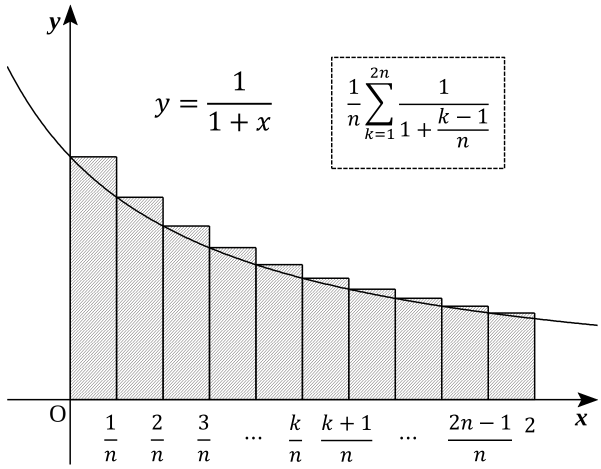


$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\dfrac{2(k-1)}{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\dfrac{k-1}{n}}$$

$$=\int_0^2\frac{1}{1+x}dx$$

$$=[\log|1+x|]_0^2=\log 3$$



よって、はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\dfrac{2k-1}{2n}}=\underline{\log 3}$$

問 3

【方針】

与式のようにn個の項の積になっているときは、自然対数をとり、対数の性質から積を和に変換します。すると区分求積法の形になり、定積分で表せます。

この積分は三角関数と対数関数の積になっています。このように種類の違う関数の積を積分するときは、部分積分を行います。

その結果、三角関数の積分に帰着します。三角関数の積分は、置換積分を行うと分数関数の積分に帰着します。

分数関数の積分では、分子の次数を分母の次数より下げることから始めます。

【解説】

$$P_n=\left\{\left(1+\sin\frac{n\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{n\pi}{n}}\left(1+\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{(n+1)\pi}{n}}\left(1+\sin\frac{(n+2)\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{(n+2)\pi}{n}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots(1+\sin\pi)^{\sin 2\pi}\right\}^{\frac{1}{n}}$$ とし

$$a_k=\left(1+\sin\frac{(n+k)\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{(n+k)\pi}{n}}\quad(k=0,1,2,\cdots)$$ とおくと

$P_n=(a_0a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$ となります。

ここで

$$\log P_n = \log(a_0 a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log(a_0 a_1 a_2 \cdots a_n)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \log a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \log\left(1 + \sin\frac{(n+k)\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{(n+k)\pi}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \sin\frac{(n+k)\pi}{n} \log\left(1 + \sin\frac{(n+k)\pi}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\pi + \frac{k}{n}\pi\right) \log\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \left(-\sin\frac{k}{n}\pi\right) \log\left(1 + \cos\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left(k = 0 \text{ のとき } \sin\frac{0}{n}\pi = \sin 0 = 0 \text{ なので}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(-\sin\frac{k}{n}\pi\right) \log\left(1 + \cos\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} \log P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(-\sin\frac{k}{n}\pi\right) \log\left(1 + \cos\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \int_0^1 (-\sin\pi x) \log\left(1 + \cos\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{\pi}\cos\pi x \cdot \log\left(1 + \cos\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos\pi x \cdot \frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}{1 + \cos\frac{\pi}{2}x}\ dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\log 2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \cos\pi x \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{1 + \cos\frac{\pi}{2}x} dx$$

ここで、$t = \cos\frac{\pi}{2}x$ とおくと、$\frac{dt}{dx} = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$

x	0	$\to$	1
t	1	$\to$	0

$$\int_0^1 \cos\pi x \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{1 + \cos\frac{\pi}{2}x} dx = \int_0^1 \left(2\cos^2\frac{\pi}{2}x - 1\right) \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{1 + \cos\frac{\pi}{2}x} dx$$

$$= \int_1^0 (2t^2 - 1) \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{1+t} \cdot \frac{1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x} dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{2t^2 - 1}{1+t} dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{2(t^2-1)+1}{1+t} dt = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{2(t+1)(t-1)+1}{1+t} dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \left\{2(t-1) + \frac{1}{1+t}\right\} dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[(t-1)^2 + \log|1+t|\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{\pi}(\log 2 - 1)$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} \log P_n = -\frac{1}{\pi}\log 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi}(\log 2 - 1) = -\frac{1}{\pi}$$

従って

$$\underline{\lim_{n\to\infty} P_n = e^{-\frac{1}{\pi}}}$$

③回転体の体積と極限

○原則

1． ◆回転体の体積計算

Ⅰ） $y = f(x)$をx軸まわりに回転したとき

$$V = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2 dx$$

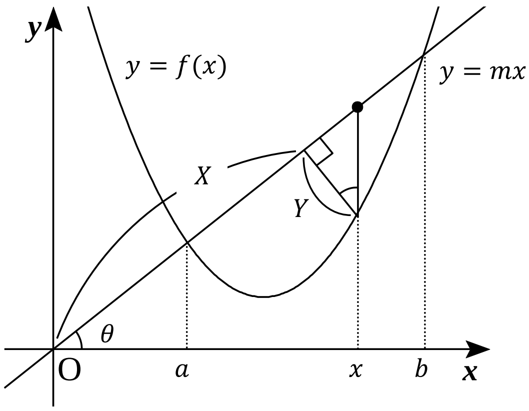
Ⅱ） $x = g(y)$をx軸まわりに回転したとき

$$V = \int_a^b \pi\{g(y)\}^2 dy$$

2． ◆ $y = mx$ 軸回りの回転体の体積計算

Ⅰ） 図のように、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = mx$ $(m = \tan\theta)$ が囲む図形を、$y = mx$ のまわりに回転して得られる立体の体積 V は

$$V=\int_a^b Y^2\frac{dX}{dx}dx$$
$$=\pi\cos\theta\int_a^b\{mx-f(x)\}^2dx$$

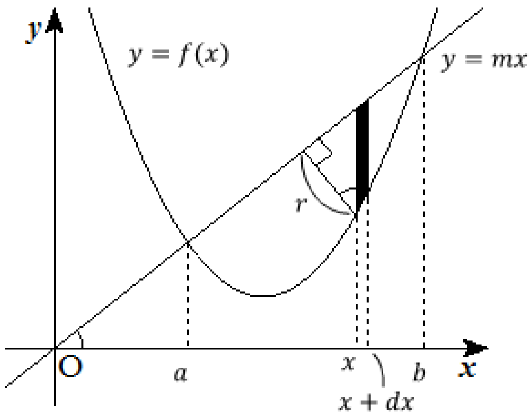


Ⅱ）傘型分割積分

右図において区間$[x,\ x+dx]$の部分を$y=mx$のまわりに回転させてできる立体は、傘のような形をしています。

この立体の体積を足し合わせて体積を求める方法です。

$$V=\int_a^b\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot rdx$$
$$=\pi\cos\theta\int_a^b\{mx-f(x)\}^2dx$$



〇解答・解説

(1)

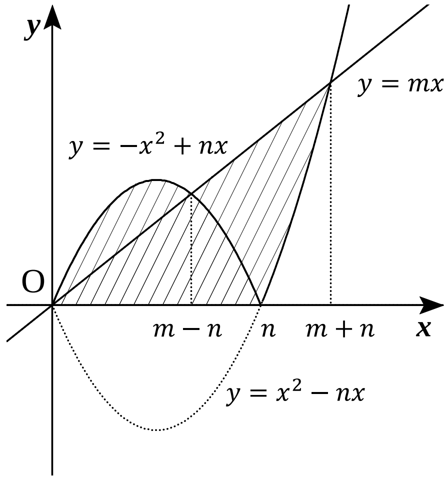
【方針】

原則に従い、x軸回りの回転体の体積を求めますが、回転する図形がx軸と重なっています。その場合は、図形をx軸で折り返したものを回転させます。

【解説】

回転する図形を確認します。

放物線$y=x^2-nx$と直線 $y=mx$のグラフは図のようになります。回転軸とD_nが重なっているので、x軸より下側の部分をx軸で折り返した図の斜線部分を回転させればよいことになります。



$$V_n=\int_0^{n-m}\pi(-x^2+nx)^2dx$$

$$+\int_{n-m}^{n+m}\pi(mx)^2dx-\int_{n}^{n+m}(x^2-nx)^2dx$$

$$=\int_0^{n-m}\pi(x^4-2nx^3+n^2x^2)\,dx$$

$$+\int_{n-m}^{n+m}\pi m^2x^2dx-\int_{n}^{n+m}(x^4-2nx^3+n^2x^2)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}nx^4+\frac{1}{3}n^2x^3\right]_0^{n-m}$$

$$+\pi\left[\frac{1}{3}m^2x^3\right]_{n-m}^{n+m}-\pi\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}nx^4+\frac{1}{3}n^2x^3\right]_n^{n+m}$$

$$=\pi\left\{\frac{1}{5}(n-m)^5-\frac{1}{2}n(n-m)^4+\frac{1}{3}n^2(n-m)^3\right\}$$

$$+\pi\left\{\frac{1}{3}m^2(n+m)^3-\frac{1}{3}m^2(n-m)^3\right\}$$

$$-\pi\left\{\frac{1}{5}(n+m)^5-\frac{1}{2}n(n+m)^4+\frac{1}{3}n^2(n+m)^3\right\}$$

$$+\pi\left\{\frac{1}{5}n^5-\frac{1}{2}nn^4+\frac{1}{3}n^2n^3\right\}$$

$$=\pi\left\{\frac{1}{5}(n-m)^5-\frac{1}{2}n(n-m)^4+\frac{1}{3}n^2(n-m)^3-\frac{1}{3}m^2(n-m)^3\right\}$$

$$-\pi\left\{\frac{1}{5}(n+m)^5-\frac{1}{2}n(n+m)^4+\frac{1}{3}n^2(n+m)^3-\frac{1}{3}m^2(n+m)^3\right\}$$

$$+\frac{\pi}{30}n^5$$

$$=\frac{\pi(n-m)^3}{30}\{6(n-m)^2-15n(n-m)+10n^2-10m^2\}$$

$$-\frac{\pi(n+m)^3}{30}\{6(n+m)^2-15n(n+m)+10n^2-10m^2\}$$

$$+\frac{\pi}{30}n^5$$

$$=\frac{\pi(n-m)^3}{30}\{n^2+3nm-4m^2\}-\frac{\pi(n+m)^3}{30}\{n^2-3nm-4m^2\}+\frac{\pi}{30}n^5$$

$$=\frac{\pi(n^2-4m^2)}{30}\{(n-m)^3-(n+m)^3\}+\frac{\pi\cdot 3nm}{30}\{(n-m)^3+(n+m)^3\}+\frac{\pi}{30}n^5$$

$$=\frac{\pi(n^2-4m^2)}{30}(-6n^2m-2m^3)+\frac{\pi\cdot 3nm}{30}(2n^3+6nm^2)+\frac{\pi}{30}n^5$$

$$=\frac{\pi m}{15}\{-(n^2-4m^2)(3n^2+m^2)+3n(n^3+3nm^2)\}+\frac{\pi}{30}n^5$$

$$=\frac{\pi m}{15}(20n^2m^2+4m^4)+\frac{\pi}{30}n^5=\left(\frac{1}{30}n^5+\frac{4}{3}n^2m^3+\frac{4}{15}m^5\right)\pi$$

-----参考-----

上記解答は、5 乗の展開をさけ、因数分解を利用しました。
次では、二項定理を利用して累乗を展開し計算します。

$$(n-m)^5=n^5-5n^4m+10n^3m^2-10n^2m^3+5nm^4-m^5$$
$$(n+m)^5=n^5+5n^4m+10n^3m^2+10n^2m^3+5nm^4+m^5$$
$$(n-m)^5-(n+m)^5=-10n^4m-20n^2m^3-2m^5$$
$$\frac{1}{5}\{(n-m)^5-(n+m)^5\}=-2n^4m-4n^2m^3-\frac{2}{5}m^5$$

$$(n-m)^4=n^4-4n^3m+6n^2m^2-4nm^3+m^4$$
$$(n+m)^4=n^4+4n^3m+6n^2m^2+4nm^3+m^4$$
$$(n-m)^4-(n+m)^4=-8n^3m-8nm^3$$
$$\frac{1}{2}\{(n-m)^4-(n+m)^4\}=-4n^3m-4nm^3$$

$$(n-m)^3=n^3-3n^2m+3nm^2-m^3$$
$$(n+m)^3=n^3+3n^2m+3nm^2+m^3$$
$$(n-m)^3-(n+m)^3=-6n^2m-2m^3$$
$$\frac{1}{3}\{(n-m)^3-(n+m)^3\}=-2n^2m-\frac{2}{3}m^3$$

これらを準備しておいて

$$\pi\left\{\frac{1}{5}(n-m)^5-\frac{1}{2}n(n-m)^4+\frac{1}{3}n^2(n-m)^3\right\}$$
$$+\pi\left\{\frac{1}{3}m^2(n+m)^3-\frac{1}{3}m^2(n-m)^3\right\}$$
$$-\pi\left\{\frac{1}{5}(n+m)^5-\frac{1}{2}n(n+m)^4+\frac{1}{3}n^2(n+m)^3\right\}$$
$$+\pi\left\{\frac{1}{5}n^5-\frac{1}{2}nn^4+\frac{1}{3}n^2n^3\right\}$$
$$=\frac{\pi}{5}\{(n-m)^5-(n+m)^5\}-\frac{\pi n}{2}\{(n-m)^4-(n+m)^4\}$$
$$+\frac{\pi n^2}{3}\{(n-m)^3-(n+m)^3\}+\frac{\pi m^2}{3}\{(n+m)^3-(n-m)^3\}+\frac{\pi}{30}n^5$$

$$= \pi \left(-2n^4 m - 4n^2 m^3 - \frac{2}{5}m^5\right) - \pi n(-4n^3 m - 4nm^3)$$

$$+\pi n^2 \left(-2n^2 m - \frac{2}{3}m^3\right) - \pi m^2 \left(-2n^2 m - \frac{2}{3}m^3\right) + \frac{\pi}{30}n^5$$

$$= \left(\frac{1}{30}n^5 + \frac{4}{3}n^2 m^3 + \frac{4}{15}m^5\right)\pi$$

(2)

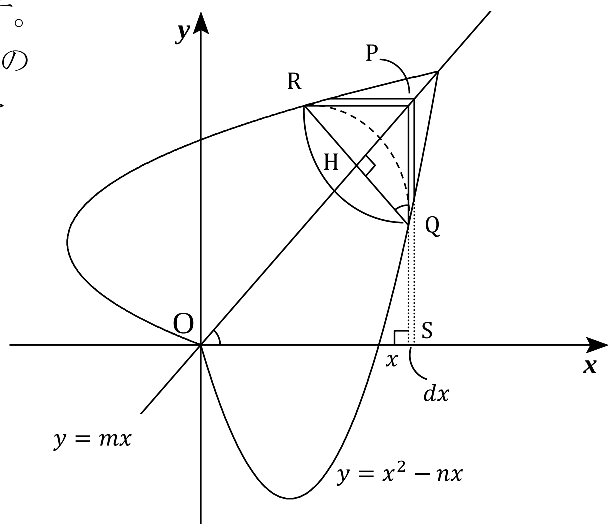
【方針】

原則Ⅱ）の傘型分割積分を利用して求めます。通常、回転体の体積は円の面積に厚みを掛けたものを足し合わせますが、この方法は、円すいの側面積に厚みを掛けたものを足し合わせます。

【解説】

直線 $y = mx$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ mx)$、
放物線 $y = x^2 - nx$ 上の点 $\mathrm{Q}(x,\ x^2 - nx)$ とします。

区間$[x,\ \Delta x]$ の部分を、直線 $y = mx$ のまわりに回転させてできる立体の体積をΔV とします。この立体は、傘のような形をしていて、その体積 ΔV は、円錐の側面積$S(x)$ に厚みΔx をかけたものと考えます。円錐の母線は PQ、底面の半径は QH です。

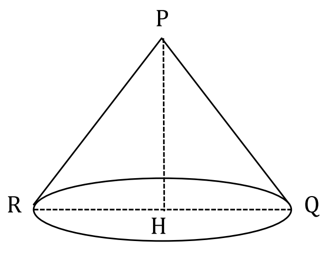


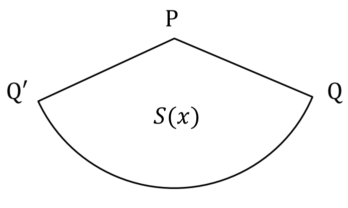
ここで $S(x)$ は扇形の面積なので

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \mathrm{QH} \cdot \mathrm{PQ}$$

QH は、$\triangle \mathrm{PSO} \backsim \triangle \mathrm{PHQ}$ より

$$\mathrm{OH} = \frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{OP}} \cdot \mathrm{PQ} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \mathrm{PQ}$$





よって

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\frac{\mathrm{PQ}}{\sqrt{1+m^2}}\cdot\mathrm{PQ}=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\mathrm{PQ}^2$$

体積 ΔV は、$S(x)$ に厚み Δx をかけたものなので

$$\Delta V=S(x)\cdot\Delta x$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta x}=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\mathrm{PQ}^2$$

$\Delta x\to 0$ のとき

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\mathrm{PQ}^2=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\{mx-(x^2-nx)\}^2$$

よって

$$\begin{aligned}W_n&=\int_0^{n+m}\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\cdot\{mx-(x^2-nx)\}^2\,dx\\&=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\int_0^{n+m}\{-x^2+(n+m)x\}^2\,dx\\&=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\int_0^{n+m}\{x^4-2(n+m)x^3+(n+m)^2x^2\}\,dx\\&=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}(n+m)x^4+\frac{1}{3}(n+m)^2x^3\right]_0^{n+m}\\&=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\left\{\frac{1}{5}(n+m)^5-\frac{1}{2}(n+m)^5+\frac{1}{3}(n+m)^5\right\}\\&=\underline{\frac{\pi(n+m)^5}{30\sqrt{1+m^2}}}\end{aligned}$$

[別解]

【方針】

原則のⅠ）を利用します。直線 $y=mx$ を t 軸とし、この t 軸に垂直な平面で立体を切ると、断面は円となるのでその円の面積を積分して体積を計算します。つまり先の解答の QH を使えば

$$\int_a^b\pi\mathrm{QH}^2dt$$

この問題では、回転体にくぼみがあるので、実際には

$$\int_a^b\pi\mathrm{QH}^2dt-\int_a^c\pi\mathrm{Q'H'}^2dt$$

のように全体から、くぼみの部分を引かなければいけません。

まず、積分区間$[a,\ b],[a,\ c]$ と断面の円の半径$\mathrm{QH},\ \mathrm{Q'H'}$ を求めます。その後の積分

計算は、x と t の関係を使って x で積分するように置換積分を行います。

【解説】

直線 $y=mx$ を t 軸とし、原点は O とします。この t 軸に沿った積分を使えば、断面は円となりその半径を使って回転体の体積が計算できます。

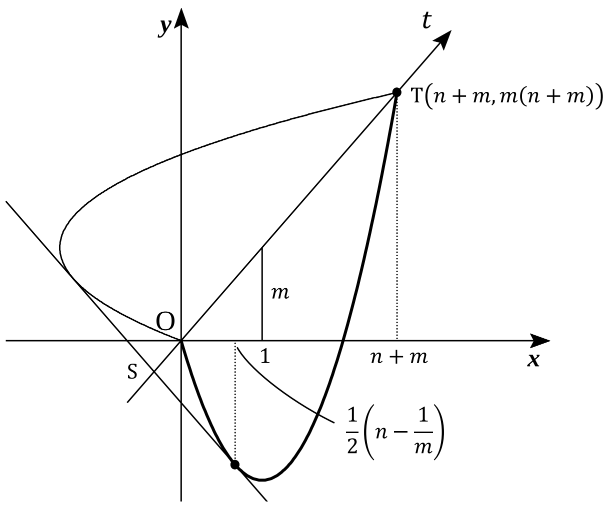
まず、積分区間を求めます。

直線 $y=mx$ 上の点 $\mathrm{S}(s,\ ms)$ を通り、$y=mx$ に垂直な直線

$$y=-\frac{1}{m}(x-s)+ms$$

が、放物線 $y=x^2-nx$ に接するとき

この直線と放物線の方程式を連立して



$$x^2-nx=-\frac{1}{m}(x-s)+ms$$

$$x^2-\left(n-\frac{1}{m}\right)x-\frac{s}{m}-ms=0$$

この 2 次方程式が重解を持てばよいので、

判別式を D として

$$D=\left(n-\frac{1}{m}\right)^2+4\left(\frac{s}{m}+ms\right)=0$$

$$\left(n-\frac{1}{m}\right)^2+4\left(\frac{1+m^2}{m}\right)s=0$$

$$\mathrm{s}=\frac{-m}{4(1+m^2)}\left(n-\frac{1}{m}\right)^2$$

このときの重解は

$$x=\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{m}\right)$$

また、放物線 $y=x^2-nx$ と直線 $y=mx$ の 1 つの交点は原点 O であり、もう 1 つは $\mathrm{T}\bigl(n+m,\ m(n+m)\bigr)$ で

$$\mathrm{OT}=(n+m)\sqrt{1+m^2}$$

このことから、積分区間は $\left[s\sqrt{1+m^2},\ (n+m)\sqrt{1+m^2}\right]$ となり、

図より、引く部分は $\left[s\sqrt{1+m^2},\ 0\right]$ です。

次に断面の円の半径を計算します。

t 軸上に点 $\mathrm{H}(t)$ をとります。点 H から t 軸に垂直に引いた直線と放物線 $y=x^2-nx$ との交点を $\mathrm{Q}(x,\ x^2-nx)$ とし、点 P、V を $(x,\ mx),\ V(x,\ 0)$ とします。

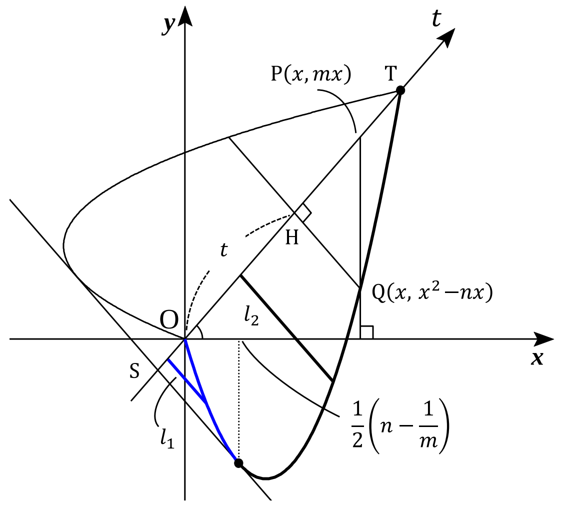
円の半径 QH は、$\triangle\mathrm{PQH}\ \backsim\ \triangle\mathrm{POV}$ より

$$\mathrm{QH} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\mathrm{PQ} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(mx - x^2 + nx)$$

ここで

$0 < x < \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{m}\right)$ のときの QH をl_1、$\frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{m}\right) < x < n + m$ のときの QH をl_2

とおくと求める体積は



$$W_n = \int_{s\sqrt{1+m^2}}^{(n+m)\sqrt{1+m^2}} \pi {l_2}^2 dt - \int_{s\sqrt{1+m^2}}^{0} \pi {l_1}^2\, dt$$

で計算されます。

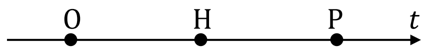
次に

$$\mathrm{HP} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\mathrm{PQ} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}(mx - x^2 + nx)$$

と、数直線(t 軸)上の 3 点 O、H、P において

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HP}}$$

が成立し、成分表示すると



$$\sqrt{1+m^2}x = t + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\mathrm{PQ} = t + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}(mx - x^2 + nx)$$

$$t = \sqrt{1+m^2}x + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}x^2 - \frac{m^2 + nm}{\sqrt{1+m^2}}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\{mx^2 + (1 - nm)x\}$$

これを用いて置換積分を行います。

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(2mx + 1 - nm)$$

t	$s\sqrt{1+m^2}$	$\to$	$(n+m)\sqrt{1+m^2}$
x	$\frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{m}\right)$	$\to$	$n+m$

t	$s\sqrt{1+m^2}$	$\to$	0
x	$\frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{m}\right)$	$\to$	0

$$W_n = \int_{\frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{m}\right)}^{n+m} \pi {l_2}^2 \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(2mx + 1 - nm)dx$$

$$-\int_{\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{m}\right)}^{0} \pi {l_1}^2 \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(2mx+1-nm)dx$$

$$=\int_0^{n+m} \pi\left\{\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(mx-x^2+nx)\right\}^2 \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(2mx+1-nm)dx$$

$$=\frac{\pi}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}\int_0^{n+m}\{x^2-(n+m)x\}^2(2mx+1-nm)dx$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで} \\ \quad 2mx+1-nm=m\{2x-(n+m)\}+1+m^2 \\ \text{として} \end{array}\right)$$

$$=\frac{\pi}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}\int_0^{n+m}\{x^2-(n+m)x\}^2 m\{2x-(n+m)\}dx$$

$$+\frac{\pi}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}\int_0^{n+m}\{x^2-(n+m)x\}^2(1+m^2)dx$$

$$=\frac{\pi m}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}\left[\frac{1}{3}\{x^2-(n+m)x\}^3\right]_0^{n+m}$$

$$+\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\int_0^{n+m}\{x^4-2(n+m)x^3+(n+m)^2x^2\}dx$$

$$=0+\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}(n+m)x^4+\frac{1}{3}(n+m)^2x^3\right]_0^{n+m}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\left\{\frac{1}{5}(n+m)^5-\frac{1}{2}(n+m)^5+\frac{1}{3}(n+m)^5\right\}$$

$$=\underline{\frac{\pi(n+m)^5}{30\sqrt{1+m^2}}}$$

(3)

【方針】

V_n と W_n はともに、n についての 5 次式です。分母分子を n^5 で割って極限を求めます。

【解説】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{W_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{30\sqrt{1+m^2}}{\pi(n+m)^5}\cdot\left(\frac{1}{30}n^5+\frac{4}{3}n^2m^3+\frac{4}{15}m^5\right)\pi$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{30\sqrt{1+m^2}}{(n+m)^5} \cdot \frac{n^5 + 40n^2m^3 + 8m^5}{30}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+m^2} \cdot \frac{n^5 + 40n^2m^3 + 8m^5}{(n+m)^5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+m^2} \cdot \frac{1 + \frac{40m^3}{n^3} + \frac{8m^5}{n^5}}{\left(1+\frac{m}{n}\right)^5}$$

$$= \underline{\sqrt{1+m^2}}$$