

Q.(数3基礎問題精講 P91 例題 51(1))

別解で、両辺に $(n+1)$ をかけてできた式がどうして公比 1 の等比数列であると言えるのかが理解できません。

A.

まず前提の話からします。 $p_{n+1} = r \times p_n$ という漸化式があるとき、この式は第 n 項に r をかけると第 $(n+1)$ 項になるという意味なので、 $\{p_n\}$ は公比 r の等比数列と言えます。これが等比数列の漸化式の形です。

この問題の場合、まず漸化式の両辺に $(n+1)$ をかけた式

$$(n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+1)na_n$$

の、右辺全体を新たに一つの数列とみなすことにします。つまり $b_n = (n+1)na_n$ とおきます。すると

b_{n+1} は、 b_n における n を全て $n+1$ に置き換えたものなので

$b_{n+1} = (n+2)(n+1)a_{n+1}$ となり、左辺と一致します。

これより漸化式は $b_{n+1} = b_n$ と書き換えられます。

これを先に述べた p_n の漸化式と比較すると $r=1$ なので $\{b_n\}$ は公比が1の等比数列と分かります。つまりどの項も同じ値です。

また $b_1 = 2 \times 1 \times a_1 = 1$ であり、どの項も同じ値なので $b_n = 1$ と分かります。あとは再び a_n に戻してあげれば a_n の一般項が求められます。

初めは慣れないと思うので上のように b_n などと置き換えた方がよいですが、慣れれば解答のように置き換えを省いても問題ありません。できるだけ頭の中で置き換えができるように慣れておきましょう。またこの別解のように、 n を含む数をかけることで等比数列を作る操作も時々使うことがあるので、この操作にも慣れるようにしましょう。