Q.（ 基礎問題精講数学 3 P208 例題 114）
解説の補助をお願いします。

(1)
【方針】
不等式の証明は**大きい方から小さい方を引いて 0 以上であることを示す**のが最もオーソドックスな解法です。分数同士の大小比較は少々面倒ですが、分子が全て 1 になっていることと x≧0 であることから、それぞれの分母同士のみで大小比較をすれば簡単に示せることに気付きます。このように**証明すべき式を、示しやすそうな式に変形することは有効です。**

【解説】
$x \geqq 0$ なので、$\frac{1}{(x+1)^2} \leqq \frac{1}{x^2+x+1} \leqq \frac{1}{x+1}$が成り立つとすれば各辺の分母同士を比較して $x+1 \leqq x^2+x+1 \leqq (x+1)^2$が成り立つので、これを証明します。

まず、第 1 辺と第 2 辺、つまり$x+1 \leqq x^2+x+1$を示します。
$(\text{第 2 辺}) - (\text{第 1 辺}) = x^2+x+1-(x+1) = x^2 \geqq 0$

次に第 2 辺と第 3 辺、つまり$x^2+x+1 \leqq (x+1)^2$を示します。
$$\begin{aligned}(\text{第 3 辺}) - (\text{第 2 辺}) &= (x+1)^2 - x^2 + x + 1\\ &= x^2+2x+1-(x^2+x+1) = x \geqq 0 \qquad (\because x \geqq 0)\end{aligned}$$

以上より、$x+1 \leqq x^2+x+1 \leqq (x+1)^2$が示されました。
いま$x \geqq 0$で各辺は正なので、各辺の逆数をとると大小関係が逆になって
$$\frac{1}{(x+1)^2} \leqq \frac{1}{x^2+x+1} \leqq \frac{1}{x+1}$$
となります。　(証明終わり)

なお、テキストの解答のように各辺の分母の値をグラフで描き、その上下関係により一度に不等式を証明する方法もあります。直線と放物線の比較(つまり$x+1 \leqq x^2+x+1$)は簡単にできますが、放物線同士の比較(つまり$x^2+x+1 \leqq (x+1)^2$)は図形だけで判断し難いので、上に示したように式の引き算で示す方が確実です。

⑵

【方針】

まず⑴と⑵の不等式を比較します。不等式の第 2 辺に注目すると⑵は⑴の各辺を x:0→1 で定積分したものになっていることに気づきます。ということは、「**⑴で示した不等式の第 1 辺と第 3 辺を積分した値が、それぞれ 1/2 と log2 になるのではないか？**」と推測できます。そこで各辺を定積分してみましょう。

また⑵で等号がないことについて考えます。P209 のポイントにあるように「等号はつねに f(x)と g(x)が一致するとき」だけ成立します。⑴の不等式の等号成立は x=0 のときのみなので、この場合は等号が取れることが分かります。

【解説】

⑴で示した不等式の第 1 辺$\frac{1}{(x+1)^2}$と第 3 辺$\frac{1}{x+1}$を x:0→1 で定積分します。

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

変数が分母にある 2 次以上の分数関数の積分は$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$型の積分で出来ないか？と考えましょう。

$$= \int_0^1 \frac{(x+1)'}{(x+1)^2}dx$$ ← 1 は x + 1 を微分したものと捉えることができます。

$$= \left[(-1)\frac{1}{x+1}\right]_0^1$$

$$= (-1)\frac{1}{1+1} - (-1)\frac{1}{0+1} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

次に第 3 辺です。

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$$

変数が分母にある 1 次の分数関数の積分は自然対数の微分の逆ではないか？と思い出しましょう。

$$= \int_0^1 \frac{(x+1)'}{x+1}dx$$ ← 1 は x + 1 を微分したものと捉えることができます。

$$= [\log(x+1)]_0^1$$

$$= \log(1+1) - \log(0+1) = \log 2 - \log 1 = \log 2 \qquad (\because \log 1 = 0)$$

これより、(1)の不等式の各辺を x:0→1 で定積分すると、(1)の不等式の等号は x=0 のときのみ成立するので等号が外れて

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx < \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} < \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$$

$$\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} < \log 2$$

となります。（証明終わり）

この問題のように積分において「×1」は「ある式の微分された形」とみなすことが多いので注意しておきましょう。**分数のない式では「×1」が隠れているので特に注意しましょう。**

なお積分を行う上で、**積分した式を微分してもとの式に戻るか確認する**とケアレスミスを減らせるので、必ず検算しましょう。

例）$\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = -\frac{1}{x+1} + \mathrm{C}$　　$(\mathrm{C}\text{: 積分定数})$という積分をしたとき、

$-\dfrac{1}{x+1} + \mathrm{C}$ をxで微分すると

$$\left(-\frac{1}{x+1} + \mathrm{C}\right)' = -(-1) \times \frac{1}{(x+1)^2} \times (x+1)' = \frac{1}{(x+1)^2}$$

となってもとの式と同じになるので、この積分は正しいことが確認できます。