

Q.(標準問題精講数学 1A P98 例題 40)

解説の補助をお願いします。

A.

整数を扱う問題では、通常的不等式にはない特殊な条件がつくので解はかなり制限されます。そこである条件から解となりうる範囲を絞っていくことが基本的なアプローチの仕方です。その解の範囲の絞り方は問題によって様々です。

この問題ではまず「二次方程式が整数解を持つ」という文言から範囲を絞れそうです。なぜなら整数は実数の中に含まれますから、整数解をもつためにはまず実数解を持つ必要があります。この条件を式で表すなら判別式  $D \geq 0$  となるので、 $n$  をおおまかに絞れるだろう、と目をつけます。

※「二次方程式が実数解をもつ $\Leftrightarrow$ 判別式  $D \geq 0$ 」はすぐ思い出せるようにしておきましょう。

$x^2 + 2nx + 2n^2 + 4n - 16 = 0$  の解の判別式を  $D$  とすると、二次方程式が実数解を持つための条件は

$D \geq 0$  なので

$$(2n)^2 - 4(2n^2 + 4n - 16) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -4n^2 - 16n + 64 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 16 \leq 0$$

これで、 $n$  の満たすべき必要条件が導けました。 $n$  が実数ならここから解の公式を使うなりして解けますが、 $n$  は整数なので少し扱い方が変わります。

まず  $n$  で平方完成します。

$$n^2 + 4n + 4 - 4 - 16 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (n^2 + 4n + 4) - 4 - 16 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (n + 2)^2 - 20 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (n + 2)^2 \leq 20$$

これを満たす  $n$  を挙げると

$n = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$  です。

しかしここで終わってはいけません。 $n^2 + 4n - 16 \leq 0$  という条件はあくまで必要条件なので、これらの  $n$  を方程式に代入して本当に  $x$  が整数解を持つか確認する必要があります(十分性の確認)。ここからは  $n$  の値について 1 つずつ調べていきます。

n=-6 のとき

$$x^2 + 2 \times (-6)x + 2 \times (-6)^2 + 4 \times (-6) - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 72 - 24 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4, 8$$

よって x は整数解をもつので適です。

n=-5 のとき

$$x^2 + 2 \times (-5)x + 2 \times (-5)^2 + 4 \times (-5) - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 50 - 20 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 14 = 0$$

x は整数解をもたないため、不適です。

n=-4 のとき

$$x^2 + 2 \times (-4)x + 2 \times (-4)^2 + 4 \times (-4) - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 32 - 16 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, 8$$

よって x は整数解をもつので適です。

n=-3 のとき

$$x^2 + 2 \times (-3)x + 2 \times (-3)^2 + 4 \times (-3) - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 18 - 12 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 10 = 0$$

x は整数解をもたないため、不適です。

n=-2 のとき

$$x^2 + 2 \times (-2)x + 2 \times (-2)^2 + 4 \times (-2) - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 8 - 8 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 16 = 0$$

$x$  は整数解をもたないため、不適です。

$n=-1$  のとき

$$x^2 + 2 \times (-1)x + 2 \times (-1)^2 + 4 \times (-1) - 16 = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 - 4 - 16 = 0$$

$$x^2 - 2x - 18 = 0$$

$x$  は整数解をもたないため、不適です。

$n=0$  のとき

$$x^2 + 2 \times 0 \times x + 2 \times 0^2 + 4 \times 0 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 4$$

よって  $x$  は整数解をもつので適です。

$n=1$  のとき

$$x^2 + 2 \times 1 \times x + 2 \times 1^2 + 4 \times 1 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 + 4 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 10 = 0$$

これは整数で因数分解できないので  $x$  は整数解もたないため、不適です。

$n=2$  のとき

$$x^2 + 2 \times 2 \times x + 2 \times 2^2 + 4 \times 2 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 8 + 8 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -4, 0$$

よって  $x$  は整数解をもつので適です。

以上より求める  $n$  は

$$n = -6, -4, 0, 2$$

整数問題は、おおまかに解となりうる範囲を絞る（必要条件を求める）→解が条件を満たすか調べる（十分性の確認）の基本的な流れを抑えておきましょう。