昭和 2014 数学
解答

1

(1)(1 − 1) 8　(1 − 2) 12　(2)(2 − 1)$1 \leqq a < 2$　(2 − 2)$\dfrac{5}{6}\pi$

(3)(3 − 1) 2: 5　(3 − 2)$\dfrac{5}{9}\vec{a} + \dfrac{2}{9}\vec{b}$

2

(1)(1 − 1)$\dfrac{1}{2}$　(1 − 2)$\dfrac{|t-2|}{t^2-t+2}$

⑵

$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるので $\tan\theta$ が最大の時の θ が最大である。

$f(t) = \frac{|t-2|}{t^2-t+2}$ とおくと

(i) $t < 2$ のとき $f(t) = \frac{-t+Z}{t^2-t+2}$
であるので

$$f'(t) = \frac{-(t^2-t+2)+(t-2)(2t-1)}{(t^2-t+2)^2} = \frac{t(t-4)}{(t^2-t+2)^2}$$

$(ii)2 \leqq t$ のとき

$$f(t) = \frac{t-2}{t^2-t+2} - - - \frac{-t+2}{t^2-t+2}$$

であるので，(i) より

$$f'(t) = -\frac{t(t-4)}{(t^l-t+2)^2}$$

$t = 0, 4$ のとき $f'(t) = 0$ であるので増減表は右のようになる。
$t = 0$ のとき $f(t)$ の値が最大となる。
そのとき

$$-t+2 = -0+2 = 2$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(t)$	+	0	−		+	0	−
$f(t)$	↗	1	↘	0	↗	$\frac{1}{7}$	↘

すなわち θ を最大にする点 P の座標は $(0, 2)$ (答)であり，そのとき $\tan\theta = 1$ (答)

3

(1)(1 − 1)$\dfrac{21}{256}$　(1 − 2)$\dfrac{3}{16}$ (1 − 3) $\dfrac{63}{16}$　(2)$1 < a < \sqrt{5}$

(3)(3 − 1)$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3 − 2)$a = -\dfrac{1}{2}, b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4

(1)(1−1)$a_n=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ (1−2)c = 22

⑵ $2x+y\geqq 0$ かつ $2x-y\geqq 0$ のとき

$(2x+y)+(2x-y)=2$

なので　$x=\dfrac{1}{2}$……①

$2x+y\geqq 0$ かつ $2x-y<0$ のとき

$(2x+y)-(2x-y)=2$

なので $y=1$ …… ②

$2x+y<0$ かつ $2x-y<0$ のとき

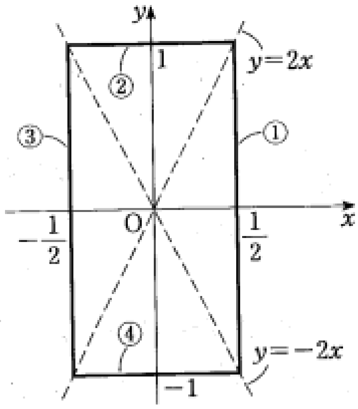
$-(2x+y)-(2x-y)=2$

なので　$x=\dfrac{1}{2}$……③

$2x+y<0$ かつ $2x-y\geqq 0$ のとき

$-(2x+y)+(2x-y)=2$

なので $y=-1$ ……④



よって求めるグラフは右図の実線部分の長方形である。

昭和大学医学部入試問題

2014 年 I 期数学

解答・解説編

①小問集合

○原則

(1) ◆指数関数　$y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$

　ⅰ) $a > 1$ のとき　$p < q \Leftrightarrow a^p < a^q$　増加関数

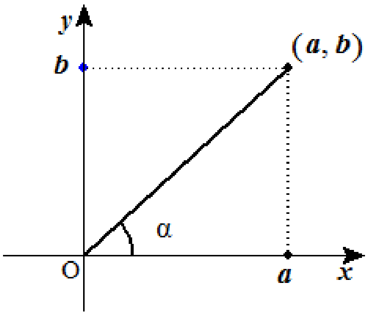
　ⅱ) $0 < a < 1$ のとき　$p < q \Leftrightarrow a^p > a^q$　減少関数

◆対数関数　$y = \log_a x$ (底の条件 $a > 0, a \neq 1$　真数条件 $x > 0$)

　ⅰ) $a > 1$ のとき　$p < q \Leftrightarrow \log_a p < \log_a q$　増加関数

　ⅱ) $0 < a < 1$ のとき　$p < q \Leftrightarrow \log_a p > \log_a q$　減少関数

(2) ◆三角関数の合成



$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし、

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

◆方程式とグラフ

　方程式$f(x) = a$ (a：定数) の解の個数は、曲線$y = f(x)$と直線$y = a$ との共有点の個数と一致する。

　このように、方程式をグラフの視点で見ることはとても重要です。

◆2 次方程式の解と係数の関係

　2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$の 2 つの解をα, βとおく。

このとき、

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

(3) ◆2 つのベクトルの直交条件

$$\vec{a} \perp \vec{b}\ \left(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}\right) \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

◆ベクトルの分解

　$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a}$と$\vec{b}$が平行でないとき、任意のベクトル$\vec{p}$ は、次のようにただ一通りに表すことができる。

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}\quad ただし\ s, t\ は実数$$

○解答・解説

(1)

【方針】

(1-1) 指数関数の不等式を原則のような形に変形することを考えます。その為に、$2^{x+2}-2^x$をどうにかしたいのですが、よく見ると2^xで括れますね。

(2-2) $\log_2 x^6 = 6\log_2 x$ としてしまうと、その後の計算が大変です。計算がし易くなるように、$\log_2 x^6$を変形します。

【解説】

(1-1) $2^{x+2}-2^x = 2^x(2^2-1) = 3\cdot 2^x$ より、与えられた連立不等式は、

$$600 < 3\cdot 2^x < 900$$
$$200 < 2^x < 300$$

$2^7 = 128,\ 2^9 = 512$より、

$$2^7 < 200 < 2^x < 300 < 2^9$$

底は2なので、増加関数です。

この不等式を満たす自然数xは、$\underline{x = 8}$

(1-2) $\log_2 x^6$をうまく使うために、一つずつ不等式を解きます。

ⅰ) $21 < \log_2 x^6$

$\log_2 x^6 = 3\log_2 x^2$ より、

$$21 < 3\cdot\log_2 x^2$$
$$7 < \log_2 x^2$$
$$\log_2 2^7 < \log_2 x^2$$
$$2^7 < x^2$$
$$128 < x^2 \cdots ①$$

底は2なので、増加関数です。

$11^2 = 121,\ 12^2 = 144$ で、①を満たす自然数xは、$x \geqq 12 \cdots ②$

ⅱ) $\log_2 x^6 < 22$

$\log_2 x^6 = 2\log_2 x^3$ より、

$$2\cdot\log_2 x^3 < 22$$
$$\log_2 x^3 < 11$$
$$\log_2 x^3 < \log_2 2^{11}$$

底は2なので、増加関数です。

$x^3 < 2048 \cdots$ ③

$12^3 = 1728,\ 13^3 = 2197$ で、③を満たす自然数xは、$x \geqq 12 \cdots$ ④

②④の両方をみたす自然数xは、$\underline{x = 12}$

(2)

【方針】

(2-1) 原則に従って、$y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ と $y = a$ のグラフを書きます。2 つのグラフの共有点の個数が 2 個となるようなaの値の範囲を読み取ります。

$y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ は合成してグラフを書きましょう。

(2-2) $\alpha + \beta$の値を求めるには、まず$\tan(\alpha + \beta)$の値を求めます。加法定理を使うと$\tan\alpha + \tan\beta,\ \tan\alpha\tan\beta$の形がでてきます。条件と合わせて、2 次方程式の解と係数の関係を使うことに気が付きます。

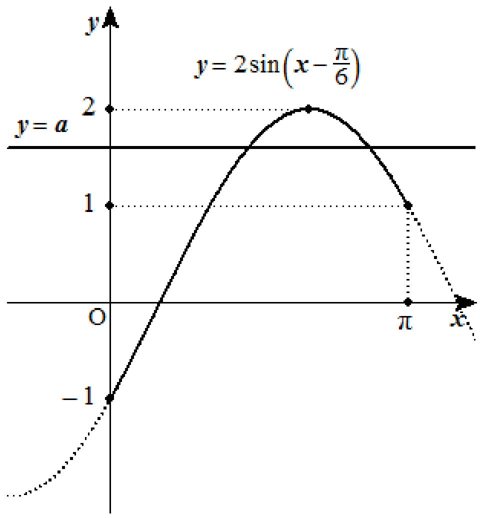
【解説】

(2-1) 方程式の解の個数を、グラフの共有の個数という視点から見ます。つまり、方程式 $\sqrt{3}\sin x - \cos x = a$ より、$y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ と $y = a$ のグラフを書いて、共有点について調べるのです。

$$y = \sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2}\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\sin(x - \frac{\pi}{6})$$

$0 \leqq x \leqq \pi$のときの、$y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ のグラフは、右のようになります。



直線$y = a$との共有点の個数が 2 個となるのは、

$1 \leqq a < 2$

時です。

$\therefore \underline{1 \leqq a < 2}$

(2-2) $\alpha + \beta$の値を求める為に、$\tan(\alpha + \beta)$の値を求めます。加法定理から、

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \cdots ⑤$$

ここで、条件より解と係数の関係から、

$$\tan\alpha+\tan\beta=-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdots⑥,\qquad \tan\alpha\tan\beta=-1\ \cdots⑦$$

⑥⑦を⑤に代入して、

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-(-1)}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$0<\alpha+\beta<\pi$ より、$\underline{\alpha+\beta=\frac{5}{6}\pi}$

(3)

【方針】

(3-1) 点 H がどのような点なのかに着目すると、それは垂線の足です。従って、OH と AB は垂直です。垂直といったら内積が 0 を利用します。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を設定し、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ を計算しましょう。

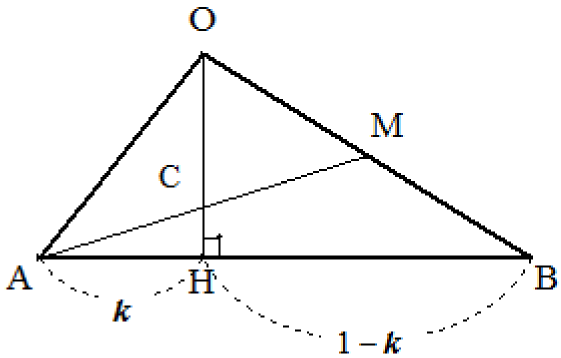
(3-2) 点 C は、OH 上の点でもあり、AM 上の点でもあります。このことから、$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$を用いて 2 通りの方法で表します。原則から、$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$の表し方は 1 通りなので、$\vec{a}$と$\vec{b}$の係数が等しくなります。それにより、連立方程式がたちます。

【解説】

(3-1) AH：HB $=k:(1-k)$とおくと、

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$$

OH ⊥ ABより、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$



従って、

$$\{(1-k)\vec{a}+k\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

$$(k-1)|\vec{a}|^2+k|\vec{b}|^2+(1-2k)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

ここで、

$$|\vec{a}|=1,\qquad |\vec{b}|=2,\qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos120^\circ=1\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

なので、

$$(k-1)\cdot1^2+k\cdot2^2+(1-2k)(-1)=0$$

$$7k=2\qquad \therefore k=\frac{2}{7}$$

$$\therefore\ \mathrm{AH}:\mathrm{HB}=\frac{2}{7}:\frac{5}{7}=\underline{2:5}$$

(3-2) 点 C は、線分 OH 上にあるので、実数l を用いて、

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = l\overrightarrow{\mathrm{OH}} = l\left(\frac{5}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}\right) = \frac{5l}{7}\vec{a} + \frac{2l}{7}\vec{b} \cdots ⑧$$

また、点 C は線分 AM 上にあるので、$\mathrm{AC} : \mathrm{CM} = m : 1 - m$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1-m)\vec{a} + m\left(\frac{1}{2}\vec{b}\right) = (1-m)\vec{a} + \frac{m}{2}\vec{b} \cdots ⑨$$

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0},\ \vec{a} \nparallel \vec{b}$ より、$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$は、$\vec{a}, \vec{b}$を用いてただ一通りに表せるので、
⑧⑨より、

$$\begin{cases} \dfrac{5l}{7} = 1 - m \\ \dfrac{2l}{7} = \dfrac{m}{2} \end{cases}$$

この連立方程式を解くと、

$$l = \frac{7}{9}, \qquad m = \frac{4}{9}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{5}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}$$

②平面図形

○原則

1．◆直線の傾き

傾きがmの直線とx軸の正の向きとのなす角をθとすると、

$$m = \tan\theta$$

2．◆2 直線のなす角

2 直線l, mが交わるとする。x軸の正の向きと直線lとのなす角をα，直線mとなす角をβ　$(0 \leqq \alpha < \beta < \pi)$ としたとき、2 直線l, mのなす鋭角θは、

$$\theta = \beta - \alpha \text{ または } \theta = \pi - (\beta - \alpha)$$

3．◆加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

４．◆関数の最大値・最小値を求める

基本の考えは、グラフを書いてグラフから最大値・最小値を読み取ることです。その為に微分して増減表を書きます。

たまに、有名不等式(相加平均・相乗平均の関係など)を使って解くこともあります。

○解答・解説

(1)

【方針】

(1-1) 三角比$\tan\theta$の定義を使います。

(1-2) θ は 2 直線 AP と BP とのなす角です。原則に従って、直線 AP とx軸とのなす角をα、直線 BP とx軸とのなす角をβとして、θをα,βで表します。

【解説】

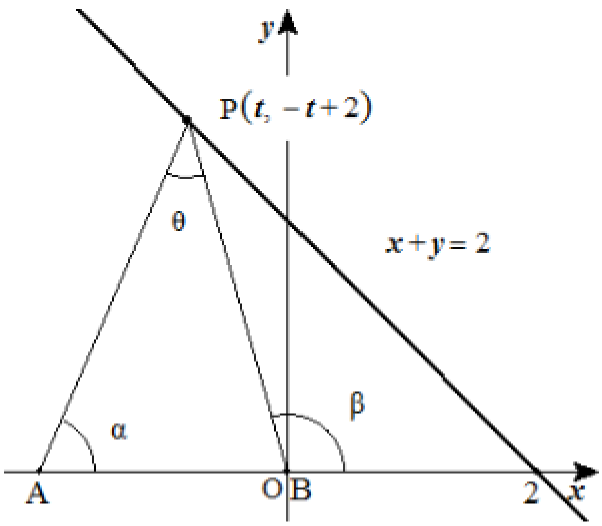
(1-1) $t=-2$のとき△PAB は、$\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$の直角三角形なので、

$\tan\theta$の定義から、

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{PA}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

(1-2) 直線 AP とx軸の正の向きとのなす角をα, 直線 BP とx軸の正の向きとのなす角をβとおきます($0\leqq\alpha,\beta\leqq\pi$)。$\theta$は 2 直線 AP と BP とのなす角なので、$\alpha$と$\beta$の差で表すことができます。ただ、α と$\beta$どちらの角が大きいかで、場合分けが必要です。また、

$\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=\frac{\pi}{2}$のときは$\tan\alpha,\tan\beta$が定義されないので注意します。



ｉ) $\alpha=\frac{\pi}{2}$のとき

このときは、$t=-1$ のときで、$(1-1)$より、$\tan\theta=\frac{1}{2}$

$\beta=\frac{\pi}{2}$のとき

このときは、$t=0$ のときで、△PBA が直角三角形であることから

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{PB}}=\frac{2}{2}=1$$

ⅱ）$\beta>\alpha$のとき、このときは点 P が第Ⅰ象限、第Ⅱ象限にあるときで、
$t<-2,-2<t<0,0<t<2$　のとき

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\cdots①$$

ここで、$\tan\alpha$は、直線 AP の傾きなので、

$$\tan\alpha=\frac{-t+2}{t+2}\cdots②$$

$\tan\beta$は、直線 BP の傾きなので、

$$\tan\beta=\frac{-t+2}{t}\cdots③$$

②③を①に代入して、

$$\tan\theta=\frac{\frac{-t+2}{t}-\frac{-t+2}{t+2}}{1+\frac{-t+2}{t}\cdot\frac{-t+2}{t+2}}=\frac{(2-t)(2+t)-t(2-t)}{t(t+2)+(2-t)^2}$$

$$=\frac{-2t+4}{2t^2-2t+4}$$

$$=\frac{-t+2}{t^2-t+2}$$

ⅲ）$\alpha\geqq\beta$ のとき、このときは点 P が第Ⅳ象限にあるか、x軸上のときなので、
つまり、$t\geqq2$

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=-\tan(\beta-\alpha)$$

$$=\frac{t-2}{t^2-t+2}$$

ⅰ）はⅱ）に含まれているので、ⅲ）と合わせて

$$\tan\theta=\frac{|t-2|}{t^2-t+2}$$

(2)
【方針】

$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$のとき、$\tan\theta$ は単調増加関数です。従って、θ が最大となるのは、$\tan\theta$ が最大になるときです。(1-2)より、$\tan\theta$ は t についての関数なので微分して増減表を書きましょう。増減表から、$\tan\theta$ の最大値を読み取ります。

【解説】

$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$のとき、$\tan\theta$は単調増加関数なので、$\tan\theta$が最大になるとき、$\theta$も最大になります。そこで、(1-2)より

$$f(t) = \frac{|t-2|}{t^2-t+2}$$

とおいて、$f(t)$の増減表を作ります。

商の微分

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

ⅰ）$t \geqq 2$ のとき

$$f(t) = \frac{t-2}{t^2-t+2}$$

$$f'(t) = \frac{1\cdot(t^2-t+2)-(t-2)\cdot(2t-1)}{(t^2-t+2)^2}$$

$$= \frac{-t^2+4t}{(t^2-t+2)^2} = \frac{-t(t-4)}{(t^2-t+2)^2}$$

ⅱ）$t < 2$ のとき

$$f(t) = -\frac{t-2}{t^2-t+2}$$

$$f'(t) = \frac{t(t-4)}{(t^2-t+2)^2}$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(t)$	＋	0	－	／	＋	0	－
$f(t)$	↗	1	↘	0	↗	$\frac{1}{7}$	↘

増減表より、$t=0$ のとき $f(t)$ は最大値をとります。その時の点 P の座標は $(0,2)$ です。

$\therefore$ $\mathrm{P}(0,2)$ のとき、θは最大値をとり、$\tan\theta = 1$

③小問集合

○原則

(1) ◆独立試行

2 つの試行T_1, T_2があり、試行T_1, 試行T_2の結果がお互いに全く影響を及ぼさないとき、試行T_1と試行T_2は独立であるといいます。

また、試行T_1で A が起こり、かつ試行T_2で B が起こる確率は、$P(A) \cdot P(B)$となります。

◆期待値の計算

ある試行によって得られる数値を $x_i\ (i = 1,2,3,\cdots,n)$, そのときの確率を$P(x_i)$とします。この試行の期待値は、次の式となります。

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)$$

(2) ◆2 次方程式の解の配置問題

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0\ (\mathrm{a} > 0)$ がkより小さい相異なる2つの実数解を持つようにするには、次のように考えます。

Ⅰ）グラフの利用。$f(x) = ax^2 + bx + c$ とおきます。

① $f(x) = 0$ の判別式 $\mathrm{D} > 0$　② 軸$x = -\dfrac{b}{2a} < k$　③ $f(k) > 0$

Ⅱ）解と係数の関係を利用。2 次方程式の 2 解をα, βとします。

① 判別式 $\mathrm{D} > 0$　② $\alpha + \beta < 2k$　③ $(\alpha - k)(\beta - k) > 0$

◆対数の底の条件と真数条件

$\log_{\mathrm{a}} b$において、底の条件は、$0 < a,\ a \neq 1$、 真数条件は、$0 < b$ となります。

◆対数関数　$y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$

ⅰ) $a > 1$ のとき　　$p < q \iff \log_a p < \log_a q$

ⅱ) $0 < a < 1$ のとき　$p < q \iff \log_a p > \log_a q$

(3) ◆行列の掛け算

Ⅰ）積の定義　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$ のとき、$AB = \begin{pmatrix} as + bu & at + bv \\ cs + du & ct + dv \end{pmatrix}$

Ⅱ）一般に積の交換法則は成り立ちません。　$AB \neq BA$

◆単位行列と逆行列

A, B, Eは正方行列とします。

Ⅰ）$AE = EA = A$ を満たす行列Eを単位行列といいます。

2 次の単位行列は、$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ です。

Ⅱ）$AB = \mathrm{B}A = E$ (Eは単位行列)を満たす行列BをAの逆行列といいA^{-1}で表します。

○解答・解説

(1)

【方針】

(1-1)(1-2) どんなときに、$R = 1$や$R = 4$となるか具体的に考えます。また、球をもとの袋に戻し、同じ試行を繰り返すので、反復試行となります。

(1-3) $R = 0$ ～7となるときの確率を計算します。(1-1)(1-2)と同様に考えます。期待値は定義の式に沿って計算します。

【解説】

(1-1) 3 つの球の数字をa, b, c $(a \leqq b \leqq c)$とおきます。

$R = 1$となるのは、$c - a = 1$のときです。例えば$(a, b, c) = (1,1,2), (1,2,2) \cdots (*)$ があります。3 回の試行を終えた結果、取り出した球の数字が、1,1,2 となるような球の取り出し方は、${}_3C_1$ 通りあり、同様に、1,2,2の場合も${}_3C_1$ 通りです。

従って、$(*)$のような球の取出し方は、${}_3C_1 \times 2$ 通りです。

このようなことから、$R = 1$となるのは、$(a, b, c) = (a, a, a+1), (a, a+1, a+1)$ のときで、a は 1 から 7 までの 7 通りの数字が考えられます。よって、場合の数は

$$7 \times {}_3C_1 \times 2 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \text{ 通り}$$

求める確率は、

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{8^3} = \underline{\frac{21}{256}}$$

(1-2) $R = 4$となるのは、$c - a = 4$のときです。

例えば$(a, b, c) = (1,1,5), (1,2,5), \cdots, (1,5,5)$ があります。

このようなことから、$R=4$となるのは、

$$(a,b,c)=(a,b,a+4)$$

のときで、b の値によって次の 2 通りに場合分けします。

ｉ）$b=a,\ a+4$ のとき

a は 1〜4 までの 4 通り、b は$a, a+4$ の 2 通り、球の取出し方で${}_3C_1$通り

$$4\times 2\times {}_3C_1=4\times 2\times 3 \text{ 通り}$$

ⅱ）$a<b<a+4$ のとき

a は 1〜4 までの 4 通り、b は$a+1, a+2, a+3$の 3 通り。球の取出し方は、3! 通り

$$4\times 3\times 3! \text{ 通り}$$

ｉ）ⅱ）より、$R=4$となる場合の数は、

$$4\times 2\times 3+4\times 3\times 3!=4\times 3\times 2\times 4 \text{ 通り}$$

求める確率は、

$$\frac{4\times 3\times 2\times 4}{8\times 8\times 8}=\underline{\frac{3}{16}}$$

(1-3) Rの期待値を求めるために、$R=0$〜7 となるそれぞれの確率が必要です。$R=1$ と 4 は、(1-1)(1-2)で求めたので、それ以外の値の時の確率を求めていきます。

$R=0$のときは、(a,a,a)のように 3 つ同じ数字になる場合。

aは 1〜8 まで取り得るので、全部で 8 通り。

以降の場合の数の求め方は、(1-2)と同様に考えます。

$R=2$のとき、$(a,b,a+2)$なので

$$6\times 2\times {}_3C_1+6\times 1\times 3!$$

$R=3$のとき、$(a,b,a+3)$なので

$$5\times 2\times {}_3C_1+5\times 2\times 3!$$

$R=5$のとき、$(a,b,a+5)$なので

$$3\times 2\times {}_3C_1+3\times 4\times 3!$$

$R=6$のとき、$(a,b,a+6)$なので

$$2\times 2\times {}_3C_1+2\times 5\times 3!$$

$R=7$のとき、$(a,b,a+7)$なので

$$1\times 2\times {}_3C_1+1\times 6\times 3!$$

以上より期待値は、

$$\sum_{R=0}^{7} R\cdot P(R)=\sum_{R=1}^{7} R\cdot P(R)$$

$$=\sum_{R=1}^{7} R\cdot\frac{(8-R)\cdot 2\cdot {}_3C_1+(8-R)\cdot(R-1)\cdot 3!}{8^3}$$

$$=\frac{6}{8^3}\sum_{R=1}^{7} R^2(8-R)=\frac{3}{4\cdot 8^2}\sum_{R=1}^{7}(8R^2-R^3)$$

$$=\frac{3}{4\cdot 8^2}\cdot\left\{8\cdot\frac{1}{6}\cdot 7\cdot 8\cdot 15-\left(\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\right)^2\right\}$$

$$=\frac{3}{4\cdot 8^2}\cdot(4\cdot 7\cdot 8\cdot 5-7^2\cdot 4^2)$$

$$=\frac{3}{4\cdot 8^2}\cdot 4^2\cdot 7(2\cdot 5-7)=\underline{\frac{63}{16}}$$

(2)

【方針】

原則に従って、不等式をたてていきます。対数不等式では、底と真数の条件に注意しましょう。

【解説】

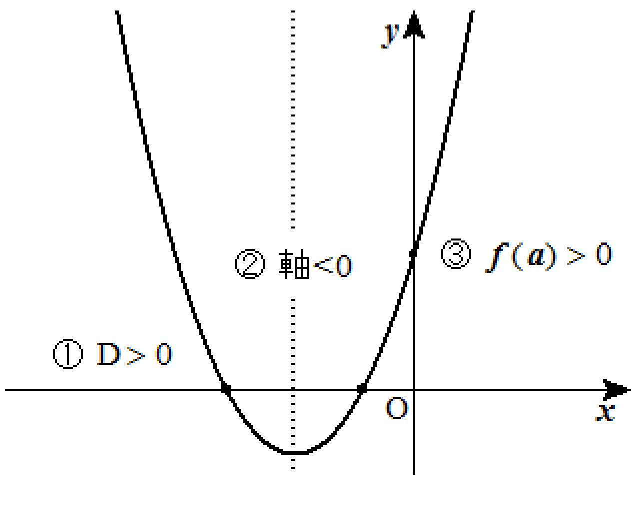
グラフを使って、2 次方程式の相異なる 2 つの解が負となる場合を考えます。

放物線 $y=f(x)=x^2+(\log_a 5)x+\log_5 a^2$ とおきます。底と真数条件から、$a>0,\ a\neq 1$

まず、x軸と異なる 2 点で交わるので、この 2 次方程式の判別式$D>0$、

$$D=(\log_a 5)^2-4\cdot\log_5 a^2>0\cdots①$$

次に、軸は負となるので、



$$-\frac{\log_a 5}{2} < 0 \cdots ②$$

また、$f(0) > 0$ より

$$\log_5 a^2 > 0 \cdots ③$$

②より$a > 1$ ③より$a^2 > 1$ $\therefore a > 1 \cdots ④$

①より、

$$(\log_a 5)^2 - 4 \cdot \frac{\log_a a^2}{\log_a 5} > 0$$

$t = \log_5 a$ とおくと、④より$t > 0$

$$t^2 - \frac{8}{t} > 0$$

$$t^3 - 8 > 0 \ (\because t > 0)$$

$$(t-2)(t^2+2t+4) > 0$$

$t^2 + 2t + 4 = (t+1)^2 + 3 > 0$より、$t > 2$ （これは、$t > 0$を満たします。）

従って、

$$\log_a 5 > 2 = \log_a a^2$$

底$a > 1$より$\log_a x$は増加関数ですから、

$$5 > a^2$$

$$-\sqrt{5} < a < \sqrt{5}$$

④と合わせて、$\underline{1 < a < \sqrt{5}}$

[別解] 解と係数の関係を用いて解くことができます。

2 次方程式の 2 解をα, βとおくと、

$$\begin{cases} \alpha < 0 \\ \beta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta < 0 \\ \alpha\beta > 0 \end{cases}$$

なので、解と係数の関係を用いて

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\log_a 5 < 0 \\ \alpha\beta = \log_5 a^2 > 0 \end{cases}$$

これは、先ほどの②③となります。判別式$D > 0$とあわせて、以降は同様なので省略します。

《注意》解と係数を使う場合、問題によっては注意が必要です。例えば 2 次方程式の 2 解が-1より小さくなるという条件のとき、うっかり

$$\begin{cases}\alpha < -1 \\ \beta < -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha + \beta < -2 \\ \alpha\beta > 1\end{cases}$$

としてしまうと、間違いです。⇐は成立しません。(反例：$\alpha = -\frac{1}{2}$，$\beta = -3$)

正しくは、

$$\begin{cases}\alpha < -1 \\ \beta < -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha + \beta < -2 \\ (\alpha + 1)(\beta + 1) > 0\end{cases}$$

です。

(3)

【方針】

(3-1) 条件の式から、行列 B を消去して行列 A についての方程式をたてます。そして、A が逆行列を持つことを利用してA^3を求めます。

(3-2) (3-1)の結果を利用すると、連立方程式がたちます。

【解説】

(3-1) 条件より、

$$A^2 = B \cdots ⑤, \qquad B^2 = A \cdots ⑥$$

⑥に⑤を代入して、

$$A = B^2 = B \cdot B = A^2 \cdot A^2 = A^4$$
$$A = A^4 \cdots ⑦$$

ここで、行列 A の行列式は、$\det A = a \cdot a - b \cdot (-b) = a^2 + b^2 > 0$ ($\because$ b > 0)
なので、逆行列A^{-1}が存在します。A^{-1}を⑦の両辺に左側から掛けて、

$$\mathrm{A}^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A^4$$
$$E = A^3 \ \ (E\text{は単位行列})$$
$$\therefore \underline{A^3 = E = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}}$$

(3-2) A^3 を計算して(3-1)の結果からa, bについての連立方程式を立てます。

$$A^2 = \begin{pmatrix}a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b \\ -b & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix}a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b \\ -b & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^3 - 3ab^2 & 3a^2b - b^3 \\ -3a^2b + b^3 & a^3 - 3ab^2\end{pmatrix}$$

(3-2)より、$A^3=E$なので、各成分比較をして、

$$\begin{cases} a^3-3ab^2=1\cdots⑧ \\ 3a^2b-b^3=0\cdots⑨ \end{cases}$$

⑨と$b>0$から、$b^2=3a^2$ を⑧に代入して、

$$a^3-3a\cdot 3a^2=1$$

$$8a^3+1=0$$

$$(2a+1)(4a^2-2a+1)=0$$

$$4a^2-2a+1=4\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}>0 \text{ より、}$$

$$2a+1=0, \therefore a=-\frac{1}{2}$$

このとき、

$$\mathrm{b}^2=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

$$b>0 \text{ より、} b=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

以上より、

$$a=-\frac{1}{2}, \qquad b=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[別解] 与えられたAの形から、回転行列を使って解くこともできます。

$b>0$ より、$a^2+b^2>0$ なので、

$$A=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ただし、

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad (0<\theta<\pi)$$

とおくことができます。

このとき、

$$A^3=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3\begin{pmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{pmatrix}$$

なので、(3-1)より、

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3\cos 3\theta = 1 \cdots (イ), \qquad \sin 3\theta = 0 \cdots ⑧(ロ)$$

$0 < 3\theta < 3\pi$なので、(ロ)より

$$3\theta = \pi, 2\pi$$

(イ)より、$\cos 3\theta > 0$なので、$3\theta = 2\pi$

このとき、(イ)より、$\sqrt{a^2+b^2} = 1$

以上より、

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & \sin\frac{2}{3}\pi \\ -\sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, \qquad b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

④小問集合

○原則

(1) ◆置換積分

方法Ⅰ) $x = g(t)$ とおく。

$$\int f(x)dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}dt = \int f\left(g(t)\right)g'(t)dt$$

方法Ⅱ) $g(x) = t$ とおく。

$$\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \int f(t)\frac{dt}{dx}dx = \int f(t)dt$$

◆部分積分

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$$

◆数列の和

$$\sum_{k=1}^{n}\{f(k)-f(k+1)\}=f(1)-f(n+1)$$

(2) ◆絶対値の定義

$$|x|=\begin{cases}x & (x \geqq 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$$

○解答・解説

(1)

【方針】

(1-1) 定積分が計算できれば数列$\{a_n\}$の一般項が求まります。この積分は、置換積分でも部分積分でもどちらでも計算できます。(1-2) $\sum(a_n-a_{n+1})$の計算であれば、原則のように、直ぐに計算できます。しかしこの問題では、それに$(n+c)$が掛かっているために、このままではうまくいきません。ただ、間が相殺されるというアイデアは使いたいので、無理やりでも原則のような形が現れるように式変形します。

【解説】

(1-1)

$$a_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n dx$$

この定積分を置換積分で計算します。

$\mathrm{t}=1-x$ とおきます。 $\dfrac{dx}{dt}=-1$

x	$0\to 1$
t	$1\to 0$

$$\begin{aligned}a_n&=\int_1^0(1-t)^2t^n(-dt)\\&=\int_0^1(t^2-2t+1)t^n dt\\&=\int_0^1(t^{n+2}-2t^{n+1}+t^n)dt\\&=\left[\frac{t^{n+3}}{n+3}-2\cdot\frac{t^{n+2}}{n+2}+\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1\\&=\frac{1}{n+3}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

[別解]　次は、部分積分で計算してみます。x^2を微分する方、$(1-x)^n$を積分する方とします。

$$a_n = \int_0^1 x^2(1-x)^n dx = \left[x^2 \cdot \frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 2x \cdot \frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1} dx$$

$$= \frac{2}{\mathrm{n}+1}\int_0^1 x(1-x)^{n+1}\, dx$$

$$= \frac{2}{n+1}\left\{\left[x \cdot \frac{-(1-x)^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-(1-x)^{n+2}}{n+2} dx\right\}$$

$$= \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2}\int_0^1 (1-x)^{n+2}\, dx$$

$$= \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2}\left[\frac{-(1-x)^{n+3}}{n+3}\right]_0^1 = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

(1-2) 無限級数の第n部分和をS_nとします。つまり、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(k+c)(a_k - a_{k+1})$$

題意より、S_nの極限が存在し無限級数の和 2 となります。式で表すと、

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2$$

です。ここで、$(k+c)(a_k - a_{k+1})$の和を計算しますが、このままではうまくいきません。そこで、途中の項が相殺されるような形を無理やり作ってみます。

$$(k+c)(a_k - a_{k+1}) = (k+c)a_k - (k+1+c)a_{k+1} + a_{k+1} \cdots ①$$

$b_k = (k+c)a_k$ とおくと、

$$① = b_k - b_{k+1} + a_{k+1}$$

となり、$b_k - b_{k+1}$の和は、途中の項が相殺されて計算できます。

従って、

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(k+c)(a_k-a_{k+1})=\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1}+a_{k+1})$$

$$=b_1-b_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}\cdots②$$

ここで、

$$b_1=(1+c)a_1=(1+c)\cdot\frac{2}{2\cdot3\cdot4}=\frac{1+c}{12}\cdots③$$

$$b_{n+1}=\frac{2}{(n+2)(n+3)(n+4)}\cdots④$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(k+2)(k+3)(K+4)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(k+2)(k+3)}-\frac{1}{(k+3)(k+4)}\right\}$$

$$=\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{(n+3)(n+4)}\cdots⑤$$

③④⑤を②に代入して、

$$S_n=\frac{1+c}{12}-\frac{2}{(n+2)(n+3)(n+4)}+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

ここで、極限をとると

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1+c}{12}+\frac{1}{3\cdot4}=2$$

$$\underline{\therefore c=22}$$

(2)

【方針】

絶対値が付いている問題は、とにかく絶対値を取らないと計算が進みません。原則に従って、場合分けをして絶対値をはずしていきます。

【解説】

$$|2x+y|+|2x-y|=2$$

ⅰ）$2x + y \geqq 0,\ 2x - y \geqq 0$ のとき

$$2x + y + 2x - y = 2$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

ⅱ）$2x + y \geqq 0,\ 2x - y < 0$ のとき

$$2x + y - (2x - y) = 2$$

$$\therefore y = 1$$

ⅲ）$2x + y < 0,\ 2x - y < 0$ のとき

$$-(2x + y) - (2x - y) = 2$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}$$

ⅳ）$2x + y < 0,\ 2x - y \geqq 0$ のとき

$$-(2x + y) + 2x - y = 2$$

$$\therefore y = -1$$

これらの場合で、グラフを書くと次のようになります。