

東邦 2015 数学
略解

- [1] ア.7 イ.5 [2] ウエ.14 オカ.27 [3] キク.35 [4] ケコ.-1 [5] サ.5 シ.5
- [6] ア.1 イ.8 ウ.4 エ.7 [7] オカ.-1 [8] キ.6 ク.3 [9] ケ.5 コ.9 サ.2 シ.9
- [10] スセ.74 ソタ.70 [11] ア.1 イ.4 ウエ.-1 オカ.12 キ.3
- [12] クケ.16 コ.3 [13] サ.2 シ.2 ス.5 [14] セ.8 ソ.3 [15] タ.4 チ.3 ツ.4

配点

問 1～11、15 各 4 点

問 12～14 各 5 点 (分数やルートがついたものなどは、ひとまとまりとして数える
($4 \times 20 + 5 \times 4$))

東邦大学入試問題

2015 年数学

解答・解説編

①2 次方程式とグラフ

○原則

1. ◆解と係数の関係

I) 二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α, β とします。このとき

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

II) 2 数 α, β に対して、 $p = \alpha + \beta, q = \alpha\beta$ とすると

2 次方程式 $t^2 - pt + q = 0$ の 2 解は、 α, β となります。

2. ◆放物線と直線が共有点を持つ条件

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と直線 $y = mx + n$ があり、

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = mx + n$ の判別式を D とします。

放物線と直線が異なる 2 点で交わる $\Leftrightarrow D > 0$

放物線と直線が 1 点で交わる $\Leftrightarrow D = 0$

放物線と直線が交わらない $\Leftrightarrow D < 0$

○解答・解説

【方針】

2 点 A, B の座標を求めて、線分 AB の長さを計算します。このとき、A, B の x 座標を α, β において解と係数の関係を使うと計算がし易いです。また、放物線と直線が異なる 2 点で交わるために、判別式が正になる条件も確認します。

【解説】

与えられた放物線と直線の交点の座標を求めるために

$$\text{連立方程式} \begin{cases} y = x^2 + 6x + 5 \\ y = 2x + k \end{cases}$$

を解きます。 y を消去して

$$x^2 + 6x + 5 = 2x + k$$

$$x^2 + 4x + 5 - k = 0 \cdots \text{①}$$

異なる 2 点 A, B で交わるので、①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 1 \cdot (5 - k) > 0$$

$$k > 1 \dots \textcircled{2}$$

また①の異なる 2 つの解を α, β とおくと、2 点 A, B は

$$A(\alpha, 2\alpha + k), B(\beta, 2\beta + k)$$

また、解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -4 \dots \textcircled{3}, \alpha\beta = 5 - k \dots \textcircled{4}$$

ここで、2 点 A, B の距離は

$$\begin{aligned} AB^2 &= (\alpha - \beta)^2 + \{(2\alpha + k) - (2\beta + k)\}^2 \\ &= (\alpha - \beta)^2 + (2\alpha - 2\beta)^2 \\ &= 5(\alpha - \beta)^2 \\ &= 5\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\} \\ &= 5\{(-4)^2 - 4(5 - k)\} \quad (\because \textcircled{3}\textcircled{4}) \\ &= 5(4k - 4) \end{aligned}$$

$AB = 2\sqrt{2}$ より

$$5(4k - 4) = (2\sqrt{2})^2$$

$$k - 1 = \frac{2}{5} \quad \therefore k = \frac{7}{5}$$

これは②を満たします。従って、 $k = \frac{7}{5}$

②数列

○原則

1. ◆等差数列

数列 $\{a_n\}$ が等差数列であるとは、すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1} - a_n = d \quad (d : \text{定数})$$

が成り立つときのことをいい、 d を公差といいます。

◆等差数列の一般項

初項 a 、公差が d である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a + (n - 1)d$$

◆等差数列の和

初項 a 、公差が d である等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S は

$$S = \frac{1}{2}n(a + a_n) = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

○解答・解説

【方針】

等差数列の初項 a 、公差 d として、一般項を a, d で表します。与えられた条件から、 a, d についての連立方程式をたて数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めます。

それにより、数列 $\{a_n\}$ は初項が負で公差が正の等差数列であることが分かります。つまり、初項からしばらくは負の値が続き、あるところから正の値が続きます。このことから和の最小値は負の値をすべて足したときになります。

【解説】

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a 、公差を d とします。このとき一般項は

$$a_n = a + (n-1)d \cdots \textcircled{1}$$

①より

$$a_{15} = a + 14d$$

$$a_{23} = a + 22d$$

また、条件から

$$a_{15} + a_{23} = 2a + 36d = -240$$

$$a + 18d = -120 \cdots \textcircled{2}$$

同様にして

$$a_{19} = a + 18d$$

$$a_{20} = a + 19d$$

$$a_{21} = a + 20d$$

条件より

$$a_{19} + a_{20} + a_{21} = 3a + 57d = -318$$

$$a + 19d = -106 \cdots \textcircled{3}$$

③－②より

$$d = 14 \quad \therefore \underline{\text{公差 } 14}$$

②に代入して $a = -372$

従って、 $a_n = -372 + (n-1) \cdot 14 = 14n - 386$

次に、 $\sum_{k=1}^n a_k$ が最小となる場合を考えます。等差数列 $\{a_n\}$ は -372 から始まって

14ずつ増えていく数列です。初項からしばらくは負の値が続き、どこかで負の値から正の値になり、その先はずっと正の値です。このことから、 $a_n \leq 0$ である項の総和が最小となります。従って、何番目までが負の値かを調べればよいことになります。

$$a_n = 14n - 386 \leq 0$$

$$n \leq \frac{386}{14} = \frac{193}{7} = 27.57 \dots$$

n は自然数なので、次のことが分かります。

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{26} < a_{27} < 0 < a_{28} < a_{29} < \dots$$

つまり、 a_{27} までが負の値なので

和 $\sum_{k=1}^n a_k$ が最小となるのは、 $n = 27$ のときです。

③対数

○原則

1. ◆常用対数の利用

正の数 N が n 桁である。

$$\Leftrightarrow 10^{n-1} \leq N < 10^n$$

$$\Leftrightarrow n - 1 \leq \log_{10} N < n$$

2. ◆対数の性質

$a, b, c > 0, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, M, N > 0$ とする。

$$\text{I) } \log_a MN = \log_a M + \log_a N \quad \text{II) } \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\text{III) } \log_a M^k = k \log_a M \quad \text{IV) } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

○解答・解説

【方針】

原則に従い、 $\log_{10} 25^{25}$ を計算して $n-1 \leq \log_{10} 25^{25} < n$ を満たす n を求めます。
 $\log_{10} 25^{25}$ は対数の性質を利用して計算します。

【解説】

対数の性質を使って、 $\log_{10} 25^{25}$ を計算します。

$$\begin{aligned}\log_{10} 25^{25} &= 25 \log_{10} 25 = 50 \log_{10} 5 \\ &= 50 \log_{10} \frac{10}{2} = 50(\log_{10} 10 - \log_{10} 2) \\ &= 50(1 - 0.301) = 34.95\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}34 &< \log_{10} 25^{25} < 35 \\ 10^{34} &< 25^{25} < 10^{35}\end{aligned}$$

従って、 25^{25} は 35 桁 の整数です。

④極限

○原則

1. ◆関数の連続

関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続である

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

2. ◆関数の極限

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ というのは、右側極限も左側極限も共に存在し

α になることです。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \alpha$$

3. ◆ $f(x) = x^n$ の極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} +\infty & (x > 1) \\ 1 & (x = 1) \\ 0 & (|x| < 1) \\ 1 \text{ と } -1 \text{ とで振動} & (x = -1) \\ \text{振動} & (x < -1) \end{cases}$$

○解答・解説

【方針】

極限を計算して、 $f(x)$ を求めます。その際、原則のような場合分けが生じます。 $f(x)$ が実数全体で連続とするには、場合分けの継ぎ目で連続となるようにします。

【解説】

まず、極限を計算して $f(x)$ を定めます。

i) $|x| > 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + x^2 + x^{2n} - x^{2n+2}}{12 + x^{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{x^{2n}} + \frac{1}{x^{2n-2}} + 1 - x^2}{\frac{12}{x^{2n}} + 1} = 1 - x^2 \end{aligned}$$

ii) $|x| = 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + x^2 + x^{2n} - x^{2n+2}}{12 + x^{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + (\pm 1)^2 + \{(\pm 1)^2\}^n - \{(\pm 1)^2\}^{n+1}}{12 + \{(\pm 1)^2\}^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + 1 + 1 - 1}{12 + 1} = \frac{a + 1}{13} \end{aligned}$$

iii) $|x| < 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + x^2 + x^{2n} - x^{2n+2}}{12 + x^{2n}} \\ &= \frac{a + x^2}{12} \end{aligned}$$

i) ii) iii) より

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & (x > 1) \\ \frac{a+1}{13} & (x = 1) \\ \frac{a+x^2}{12} & (|x| < 1) \\ \frac{a+1}{13} & (x = -1) \\ 1 - x^2 & (x < -1) \end{cases}$$

$1 - x^2$, $\frac{a+x^2}{12}$ は、すべての実数 x で連続なので

$x > 1$, $|x| < 1$, $x < -1$ のとき $f(x)$ は連続です。

よって、 $x = \pm 1$ のときに連続となるように実数 a の値を求めます。

$x = 1$ のとき $f(x)$ が連続となるには、

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1)$$

が成立すればよいので

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (1 - x^2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{a+x^2}{12} = \frac{a+1}{12}, \quad f(1) = \frac{a+1}{13}$$

より

$$0 = \frac{a+1}{12} = \frac{a+1}{13}$$

これを満たすのは、 $a = -1$ のときです。

同様に、 $x = -1$ のとき $f(x)$ が連続となるには、

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = f(-1)$$

が成立すればよいので

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{a+x^2}{12} = \frac{a+1}{12}, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} (1 - x^2) = 0, \quad f(-1) = \frac{a+1}{13}$$

より

$$\frac{a+1}{12} = 0 = \frac{a+1}{13}$$

これを満たすのは、 $a = -1$ のとき。

以上より、 $a = -1$ のとき関数 $f(x)$ はすべての実数 x で連続となります。

⑤平面図形

○原則

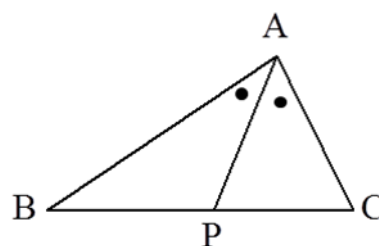
1. ◆角の2等分線と比

$\triangle ABC$ の $\angle A$ の2等分線と辺 BC との交点 P は、辺 BC を $AB:AC$ に内分します。

2. ◆三角関数 3倍角の公式

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta$$



○解答・解説

【方針】

$AC = x$, $AD = y$ とします。 $\triangle ACE$ において $\angle ACE$ の二等分線が CD なので、原則より $x : CE = y : DE$ です。また CE と DE の長さは、 $\triangle CDB$ において $\angle BCD$ の二等分線が CE であることから求まります。これで、 x, y に関する方程式が1つたちます。次に、 $\triangle ABC$ は直角三角形なので、三平方の定理から x, y についての方程式がもう1つたてられます。これらを連立して AC の長さを求めます。

【解説】

$AC = x$, $AD = y$ とします。 $\triangle ABC$ で三平方の定理から

$$2^2 + \left(y + \frac{8}{3}\right)^2 = x^2 \dots \textcircled{1}$$

また、 $\triangle CAE$ で、 CD は $\angle ACE$ の2等分線なので

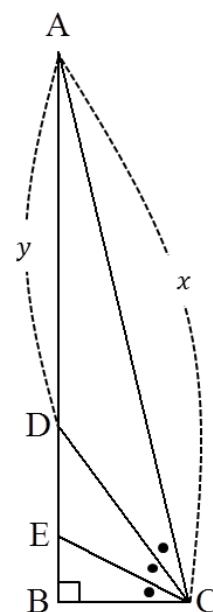
$$x : CE = y : DE \dots \textcircled{2}$$

次に、 CE , DE を求めます。

$\triangle CDB$ において三平方の定理から

$$CD^2 = 2^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{100}{9}$$

$$CD > 0 \text{ より、 } CD = \frac{10}{3}$$



また、CE は $\angle BCD$ の 2 等分線なので

$$DE : EB = CD : CB = \frac{10}{3} : 2 = 5 : 3$$

よって

$$DE = \frac{5}{8}DB = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{5}{3}$$

$$EB = \frac{3}{8}DB = \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{3} = 1$$

$\triangle EBC$ において三平方の定理から

$$EC^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \therefore EC = \sqrt{5}$$

$$CD = \frac{10}{3}, \quad EC = \sqrt{5} \text{ を②に代入して}$$

$$x : \sqrt{5} = y : \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3}x = \sqrt{5}y$$

$$\sqrt{5}x = 3y \dots \textcircled{3}$$

①③より

$$2^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}x + \frac{8}{3}\right)^2 = x^2$$

$$36 + 5x^2 + 16\sqrt{5}x + 64 = 9x^2$$

$$4x^2 - 16\sqrt{5}x - 100 = 0$$

$$x^2 - 4\sqrt{5}x - 25 = 0$$

$$(x - 5\sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

$$x = 5\sqrt{5}, -\sqrt{5}$$

$$x > 0 \text{ より } x = 5\sqrt{5}$$

$$\text{よって、} AC = \underline{5\sqrt{5}}$$

[別解]

【方針】

$\triangle ABC$ で、 $AC = \frac{BC}{\cos \angle ACB}$ なので、 $\cos \angle ACB$ の値を求めることを考えます。

$\angle BCE = \alpha$ とおくと、 $\cos \angle ACB = \cos 3\alpha$ であり $\triangle DBC$ から $\cos 2\alpha$ が計算できます。

あとは、3 倍角の公式、2 倍角の公式を利用して $\cos 3\alpha$ の値を求めます。

【解説】

$\angle BCE = \alpha$ ($0 < \alpha < 90^\circ$) とします。

$\triangle DBC$ で三平方の定理から

$$CD^2 = 2^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{100}{9}$$

$$CD > 0 \text{ より、} CD = \frac{10}{3}$$

$$\text{よって、} \cos \angle DCB = \cos 2\alpha = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{3}{3}} = \frac{3}{5}$$

2 倍角の公式から、 $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} = \frac{\frac{3}{5} + 1}{2} = \frac{4}{5}$$

$\cos \alpha > 0$ より

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdots \textcircled{3}$$

また、3 倍角の公式から

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ &= \cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(4 \cdot \frac{4}{5} - 3\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5\sqrt{5}} \end{aligned}$$

次に $\triangle ABC$ で

$$AC = \frac{BC}{\cos \angle ACB} = \frac{2}{\cos 3\alpha} = \frac{2}{\frac{2}{5\sqrt{5}}} = 5\sqrt{5}$$

⑥確率

○原則

1. ◆条件付き確率

事象 A が起きたときに、事象 B が起こる確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

○解答・解説

【方針】

(前半)「病気にかかっていると判定される」のは、「病気にかかっている」そう判定される場合と「病気にかかっていなくて」判定される場合とがあります。それぞれの確率を求めて、和をとります。

(後半) 条件付き確率の問題です。条件付き確率かそうでないかは、試行が終わっているかいないかで判断できます。この問題では、「病気にかかっていると判定されたときに」とあるので、集団の中から 1 人選ぶという試行は終わっていて、選ばれた人は病気にかかっていると判定されました。よって、条件付き確率と考えます。そして、問われているのは「病気にかかっていると判定された」人たちの中で「病気にかかっていない」人たちはどれくらいの割合ですか、ということです。

【解説】

事象 A : 「病気にかかっている」

事象 B : 「病気にかかっていると判定される」とします。

条件から

病気にかかっている人が、病気にかかっていないと誤って判定される確率

$$P_A(\bar{B}) = \frac{1}{4}$$

なので

病気にかかっている人が、病気にかかっていると正しく判定される確率

$$P_A(B) = 1 - P_A(\bar{B}) = \frac{3}{4}$$

また、

病気にかかっていない人が、病気にかかっていると誤って判定される確率

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{13}$$

より

病気にかかっていない人が、病気にかかっていないと正しく判定される確率

$$P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - P_{\bar{A}}(B) = \frac{12}{13}$$

さらに

$$\text{病気にかかっている確率 } P(A) = \frac{1}{14}$$

$$\text{病気にかかっていない確率 } P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$$

よって、病気であると判定される確率 $P(B)$ は

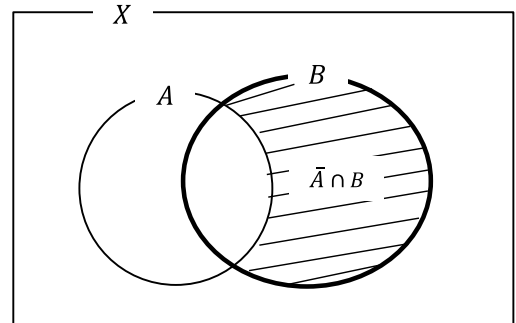
$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B) \\ &= \frac{1}{14} \cdot \frac{3}{4} + \frac{13}{14} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{14} \cdot \left(\frac{3}{4} + 1 \right) = \frac{1}{14} \cdot \frac{7}{4} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

次に

病気にかかっていると判定されたときに実際には病気にかかっていない確率 $P_B(\bar{A})$ は

$$P_B(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{13}{14} \cdot \frac{1}{13}}{\frac{1}{8}} = \frac{4}{7}$$

ベン図でみると、求める確率は B 全体のうち $\bar{A} \cap B$ のしめる割合です。



⑦微分

○原則

1. ◆極値

I) $x = a$ で極大

$x = a$ を含む十分に小さい区間で、 $f(x) < f(a)$ ($x \neq a$) のとき $x = a$ で極大といい、 $f(a)$ を極大値といいます。

II) $x = a$ で極小

$x = a$ を含む十分に小さい区間で、 $f(x) > f(a)$ ($x \neq a$) のとき $x = a$ で極小といい、 $f(a)$ を極小値といいます。

2. ◆極値であるための必要条件

関数 $y = f(x)$ において $x = a$ で極値をとるならば、 $f'(a) = 0$

3. ◆合成関数の微分

$y = f(u)$, $u = g(x)$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

4. ◆対数微分

関数 $y = f(x)$ が微分可能のとき、 $f(x) \neq 0$ となる x の範囲で $\log|f(x)|$ も微分可能で

$$\frac{d}{dx} \log|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

○解答・解説

【方針】

$f'(x)$ を求めて、増減表を書きます。まず、 $f'(x) = 0$ となる x の値を求め、その前後で $f'(x)$ の正負を調べます。

【解説】

$$f(x) = (e^x)^{e^x} = e^{xe^x}$$

合成関数の微分から

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x + xe^x)e^{xe^x} \\ &= (1+x)e^x \cdot e^{xe^x} = (1+x)(e^x)^{e^x+1} \end{aligned}$$

$(e^x)^{e^x+1} > 0$ より $f'(x) = 0$ となるのは

$$1+x=0$$

$$\therefore x = -1$$

増減表より、 $x = -1$ のとき極小値をとります。

x	...	-1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	極小	↗

-----参考-----

$f(x)$ を微分するときに、次のように対数微分を用いることもできます。

$$f(x) = (e^x)^{e^x}$$

$(e^x)^{e^x} > 0$ より、自然対数をとって

$$\log f(x) = \log(e^x)^{e^x} = e^x \log e^x = xe^x$$

両辺 x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+x)e^x f(x) \\ &= (1+x)(e^x)^{e^x+1} \end{aligned}$$

⑧複素数

○原則

1. ◆ド・モアブルの定理

整数 n に対して

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

○解答・解説

【方針】

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{104}$ の計算は、ド・モアブルの定理を利用します。そのために

$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ を極形式で表して定理を使用します。 x についての 1 次方程式となるのでそれを解きます。

【解説】

$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ を極形式で表して

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

ド・モアブルの定理から

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{104} &= \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{104} \\ &= \cos 104 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin 104 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(-\frac{52\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{52\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(-18\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-18\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

従って、

$$\left(1 - \frac{i}{2}\right)x - 8 + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{104} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{2-i}{2}x = \frac{15}{2}$$

$$x = \frac{15}{2-i} = \frac{15(2+i)}{5} = 3(2+i)$$

$$= \underline{\underline{6+3i}}$$

⑨ベクトル

○原則

1. ◆ベクトルの演算

$$\text{和 } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \quad \text{差 } \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

演算法則

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a} \quad (k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a} \quad k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \quad (k, l \text{ は実数})$$

○解答・解説

【方針】

$\overrightarrow{BE}$ を $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ で表したいのですが、始点が B であることに着目して、与えられた条件の始点も B に揃えます。得られる式から $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ だけの式にします。

【解説】

与えられた条件の始点を B に揃えます。

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \text{ より}$$

$$\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA})$$

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}) \dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{CD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CF} \text{ より}$$

$$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = \frac{3}{5}(\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{BD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BF} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \dots \textcircled{2}$$

また

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE} \dots \textcircled{3}$$

③を②に代入して

$$\overrightarrow{BD} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BE} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \dots \textcircled{4}$$

④を①に代入して

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{BE} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right)$$

$$10\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{BE} = \frac{5}{9}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{9}\overrightarrow{BC}$$

⑩データ

○原則

1. ◆平均値・分散

変量 x についての n 個のデータの値が、 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ であるとき

$$\text{平均値} \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_i \quad \text{分散} \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

○解答・解説

【方針】

$\sum_{i=1}^9 (x_i - \theta)^2$ は θ についての 2 次関数となるので、頂点で最少となります。

この 2 次関数は下に凸なので、頂点で極小をとります。極小をとる θ の値を求めるために、微分していきます。

次に、 $\sum_{i=1}^9 |x_i - \theta|$ は絶対値をはずさないと進みません。場合分けをして絶対値を

とります。1 次関数が現れるので、それらから最小となる θ をみつけます。

【解説】

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^9 (x_i - \theta)^2 = \sum_{i=1}^9 (\theta - x_i)^2 \text{ とします。}$$

$f(\theta)$ は θ についての 2 次関数です。

$$f'(\theta) = \sum_{i=1}^9 2(\theta - x_i) = 2 \left(9\theta - \sum_{i=1}^9 x_i \right)$$

$f'(\theta) = 0$ となるのは、

$$9\theta - \sum_{i=1}^9 x_i = 0 \text{ のとき、すなわち } \theta = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i = \bar{x}$$

$f(\theta)$ は下に凸の 2 次関数であり、 $\theta = \bar{x}$ は軸の方程式となるので

$$\theta = \bar{x} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i \text{ のとき最小値をとります。}$$

ここで、 $\bar{x}$ を計算しますが、データの中央値 70 を基準にして求めると、数が大きくならないので計算がし易いです。つまり

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i &= \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (x_i - 70 + 70) = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (x_i - 70) + \frac{1}{9} \cdot 9 \cdot 70 \\ &= \frac{-5 + 13 - 6 - 1 + 19 - 2 + 7 + 0 + 11}{9} + 70 \\ &= \frac{36}{9} + 70 = 74 \end{aligned}$$

よって、 $\theta = 74$ のとき最小値をとります。

$$\text{次に、} g(\theta) = \sum_{i=1}^9 |x_i - \theta| = \sum_{i=1}^9 |\theta - x_i| \text{ とおきます。}$$

$$\begin{aligned} g(\theta) &= |\theta - 64| + |\theta - 65| + |\theta - 68| + |\theta - 69| + |\theta - 70| \\ &\quad + |\theta - 77| + |\theta - 81| + |\theta - 83| + |\theta - 89| \end{aligned}$$

θ について場合分けして、絶対値をはずしていきます。

$$\theta \leq 64 \text{ のとき } f(\theta) = -9\theta + 666$$

$$64 \leq \theta \leq 65 \text{ のとき } f(\theta) = -7\theta + 538$$

$$65 \leq \theta \leq 68 \text{ のとき } f(\theta) = -5\theta + 408$$

$$68 \leq \theta \leq 69 \text{ のとき } f(\theta) = -3\theta + 272$$

$$\begin{aligned}
69 \leq \theta \leq 70 \text{ のとき } f(\theta) &= -\theta + 134 \\
70 \leq \theta \leq 77 \text{ のとき } f(\theta) &= \theta - 6 \\
77 \leq \theta \leq 81 \text{ のとき } f(\theta) &= 3\theta - 160 \\
81 \leq \theta \leq 83 \text{ のとき } f(\theta) &= 5\theta - 332 \\
83 \leq \theta \leq 89 \text{ のとき } f(\theta) &= 7\theta - 488 \\
89 \leq \theta \text{ のとき } f(\theta) &= 9\theta - 666
\end{aligned}$$

以上から、 $\theta \leq 70$ のとき $f(\theta)$ は減少関数で、 $\theta \geq 70$ のとき増加関数となるので $f(\theta)$ は、 $\theta = 70$ のとき最小値をとる。

⑪指数関数

○原則

1. ◆指数法則

$a > 0, b > 0, r, s$ は有理数とする。

$$\text{I) } a^r a^s = a^{r+s} \quad \text{II) } (a^r)^s = a^{rs} \quad \text{III) } (ab)^r = a^r b^r$$

◆相加平均・相乗平均の関係

$a > 0, b > 0$ として

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{等号成立は、} a = b \text{ のとき})$$

○解答・解説

【方針】

相加平均・相乗平均の関係を使って最大値・最小値を求めるときは、相乗平均が定数で表せることがポイントです。特に指数関数において、 $3^x + 3^{-x}$ といった場合は、

$$\frac{3^x + 3^{-x}}{2} \geq \sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = \sqrt{3^0} = 1 \text{ のように相加平均・相乗平均の関係が使えます。}$$

この問題では、 $3^{2x}, 3^{-2x}$ や $3^y, 3^{-y}$ のような式が見えるので相加平均・相乗平均の関係が使えないか考えます。そこで、 $X = 3^x, Y = 3^y$ として $f(x, y)$ を変形してみます。

【解説】

$X = 3^x, Y = 3^y$ とおきます。

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= 9^{x+1} 3^y + 3^{2x-y} + 3^{y+3} 9^{-x} + 3^{1-2x-y} \\
&= 9 \cdot 3^{2x} 3^y + 3^{2x} 3^{-y} + 27 \cdot 3^y 3^{-2x} + 3 \cdot 3^{-2x} 3^{-y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 9X^2Y + X^2Y^{-1} + 27X^{-2}Y + 3X^{-2}Y^{-1} \\
&= X^2 \left(9Y + \frac{1}{Y} \right) + 3X^{-2} \left(9Y + \frac{1}{Y} \right) \\
&= \left(X^2 + \frac{3}{X^2} \right) \left(9Y + \frac{1}{Y} \right)
\end{aligned}$$

ここで、 $X^2 > 0$, $Y > 0$ より相加平均・相乗平均の関係から

$$X^2 + \frac{3}{X^2} \geq 2 \sqrt{X^2 \cdot \frac{3}{X^2}} = 2\sqrt{3}$$

$$9Y + \frac{1}{Y} \geq 2 \sqrt{9Y \cdot \frac{1}{Y}} = 6$$

よって

$$f(x, y) \geq 2\sqrt{3} \cdot 3 = 6\sqrt{3}$$

等号成立は

$$X^2 = \frac{3}{X^2} \text{ かつ } 9Y = \frac{1}{Y}$$

$$X^4 = 3, Y^2 = \frac{1}{9}$$

$$X > 0, Y > 0 \text{ より } X = 3^{\frac{1}{4}} = 3^x, \quad Y = \frac{1}{3} = 3^y$$

従って

$$x = \frac{1}{4}, y = -1 \text{ のとき最小値 } 6\sqrt{3}$$

⑫立体の体積

○原則

1. ◆立体の体積計算(非回転体)

立体の体積を計算するには、次のような計算をします。

- i) 立体を、 z 軸に垂直な平面 $z = t$ で切ります。(もしくは x 軸、 y 軸)
- ii) 切り口の面積 $S(t)$ を求めます。
- iii) t について立体が $a \leq t \leq b$ にあるとき、立体の体積 V は

$$V = \int_a^b S(t) dt$$

どの軸に垂直な平面で切るかは、問題によります。断面積 $S(t)$ の求めやすいところで切ります。

○解答・解説

【方針】

直交する円柱の共通部分の体積を求める問題です。 z 軸に垂直な平面 $z = t$ で切って、断面積 $S(t)$ を求めます。この問題では、断面は正方形となります。

【解説】

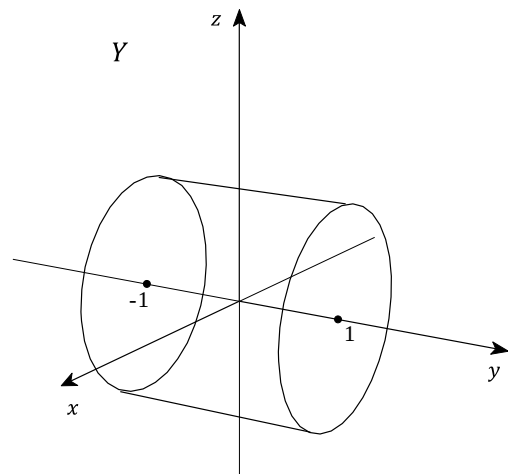
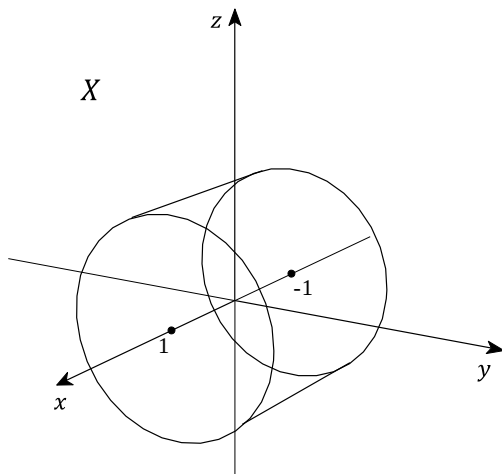
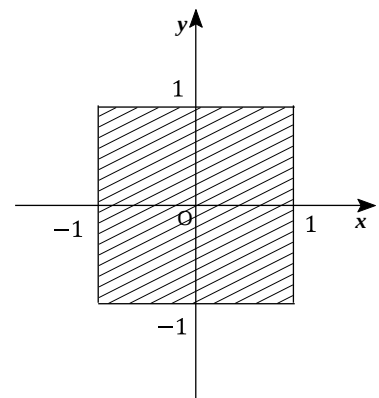
連立不等式 $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ で表される領域は、右図の境界線を含む網掛け部分となります。

この領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体 X は円柱となります

$$X = \{(x, y, z) | y^2 + z^2 \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$$

同様に、 y 軸のまわりに 1 回転してできる立体 Y も円柱となります

$$Y = \{(x, y, z) | x^2 + z^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$



X と Y の共通部分の立体を $z = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) で切ると断面は

$$\begin{aligned} X \cap Y &= \{(x, y, t) | y^2 + t^2 \leq 1, x^2 + t^2 \leq 1, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\} \\ &= \{(x, y, t) | -\sqrt{1-t^2} \leq y \leq \sqrt{1-t^2}, -\sqrt{1-t^2} \leq x \leq \sqrt{1-t^2}\} \end{aligned}$$

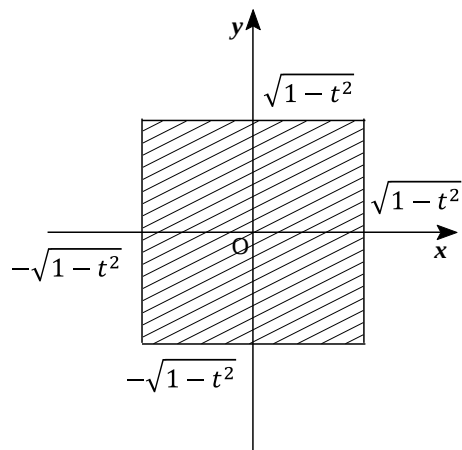
よって、右図のような正方形の周と内部になります。

断面積を $S(t)$ とおくと

$$S(t) = \left(2\sqrt{1-t^2}\right)^2 = 4(1-t^2)$$

従って、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 S(t) dt = \int_{-1}^1 4(1-t^2) dt \\ &= 2 \int_0^1 4(1-t^2) dt = 8 \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 8 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{3} \end{aligned}$$



⑬空間ベクトル

○原則

1. ◆同じ平面上の点

一直線上にない 3 点 $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ と点 $P(\vec{p})$ に対して
点 P が平面 ABC 上にある

$\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s, t が存在する。

$\Leftrightarrow$

$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}, s + t + u = 1$ となる実数 s, t, u が存在する。

◆平面への垂線の足

点 O から平面 ABC におろした垂線の足を H とする。このとき

$$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB} \text{ かつ } \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC}$$

◆2つのベクトルの直交条件

$$\vec{a} \perp \vec{b} (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

○解答・解説

【方針】

原点 O から平面 α に下した垂線の足を H とすると求める距離は $|\overrightarrow{OH}|$ となります。 H の座標を求めるために、点 H が平面 α 上にあること、 $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{PQ}$ かつ $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{PR}$ となることを利用します。後半は、まず点 H と円 C 上の点 S の距離が最大になるときを求めます。それには内積を計算していきます。

【解説】

原点 O から平面 α に下した垂線の足を H とします。求める原点 O と平面 α との距離は、 $|\overrightarrow{OH}|$ となります。そこで H の座標を求めていきます。

点 H は平面 α 上にあるので、 s, t, u を実数として

$$\overrightarrow{OH} = s\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OQ} + u\overrightarrow{OR} \quad (s + t + u = 1 \cdots \textcircled{1})$$

と表せます。各ベクトルを成分表示して

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= s(1, -2, 0) + t(0, -2, 2) + u(2, 0, 2) \\ &= (s + 2u, -2s - 2t, 2t + 2u) \end{aligned}$$

また、 $\overrightarrow{OH}$ と平面 α は垂直なので

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{PQ} \text{ かつ } \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{QR} \\ \Leftrightarrow &\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \text{ かつ } \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{QR} = 0 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{OH}$ と垂直なベクトルに $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}$ を選んだ理由は、それらを成分表示したときに 0 成分が現れ、その分内積の計算が易くなるからです。

$\overrightarrow{PQ} = (-1, 0, 2), \overrightarrow{QR} = (2, 2, 0)$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{PQ} &= (s + 2u, -2s - 2t, 2t + 2u) \cdot (-1, 0, 2) \\ &= -s - 2u + 4t + 4u = -s + 4t + 2u = 0 \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{QR} &= (s + 2u, -2s - 2t, 2t + 2u) \cdot (2, 2, 0) \\ &= 2(s + 2u - 2s - 2t) = 2(-s - 2t + 2u) = 0 \\ &-s - 2t + 2u = 0 \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

①②③より

$$s = \frac{2}{3}, \quad t = 0, \quad u = \frac{1}{3}$$

よって

$$\overrightarrow{OH} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right) \quad |\overrightarrow{OH}| = \sqrt{\left(\frac{4}{3} \right)^2 + \left(-\frac{4}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2} = 2$$

よって、原点 O と平面 α との距離は 2 となります。

次に、円 C 上の点を S とします。

$\triangle OHS$ で、三平方の定理から

$$OS^2 = HS^2 + OH^2 = HS^2 + 4 \dots \textcircled{4}$$

OS が最大となるのは、HS が最大となる
ときです。

$$\begin{aligned} HS^2 &= |\overrightarrow{HS}|^2 = |\overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PH}|^2 \\ &= |\overrightarrow{PS}|^2 + |\overrightarrow{PH}|^2 - 2\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PH} \end{aligned}$$

ここで、点 P は円 C の半径なので、

$$|\overrightarrow{PS}|^2 = 3^2 = 9$$

$$\text{また、}\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ より、} |\overrightarrow{PH}|^2 = 1$$

よって

$$\begin{aligned} HS^2 &= 9 + 1 - 2\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PH} \\ &= 10 - 2|\overrightarrow{PS}||\overrightarrow{PH}| \cos \theta = 10 - 6 \cos \theta \end{aligned}$$

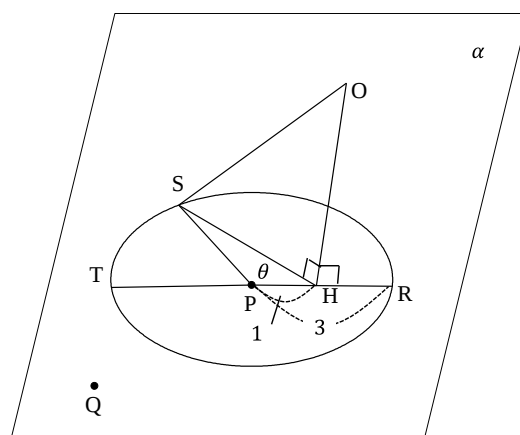
ただし、 θ は $\overrightarrow{PS}$ と $\overrightarrow{PH}$ のなす角を表し、 $0 \leq \theta < 2\pi$

従って、

$$HS^2 \leq 10 + 6 = 16 \quad (\text{等号成立は、}\theta = \pi \text{ のとき})$$

ゆえに

$$OS^2 \leq 16 + 4 = 20$$



図の点 T のとき最大となります。

$$OS > 0 \text{ より、} OS \leq 2\sqrt{5} \quad \therefore \underline{\text{最大値 } 2\sqrt{5}}$$

⑭定積分

○原則

1. ◆置換積分

方法 I) $x = g(t)$ とおく。

$$\int f(x)dx = \int f(x) \frac{dx}{dt} dt = \int f(g(t))g'(t)dt$$

方法 II) $g(x) = t$ とおく。

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t) \frac{dt}{dx} dx = \int f(t)dt$$

○解答・解説

【方針】

$t = 2^x$ と置いて置換積分をしてもうまく計算できません。 $t = -x$ と置いて置換積分を行います。

【解説】

$$I = \int_{-2}^2 \frac{x^2 \cdot 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} dx \text{ とおきます。}$$

$t = -x$ として置換積分を行うと

$$\frac{dx}{dt} = -1, \quad \begin{array}{c|ccc} x & -2 & \rightarrow & 2 \\ \hline t & 2 & \rightarrow & -2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^2 \frac{x^2 \cdot 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} dx = \int_2^{-2} \frac{(-t)^2 \cdot 2^t}{2^{-t} + 2^t} (-dt) \\ &= \int_{-2}^2 \frac{t^2 \cdot 2^t}{2^t + 2^{-t}} dt = \int_{-2}^2 \frac{x^2 \cdot 2^x}{2^x + 2^{-x}} dx \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned} 2I &= \int_{-2}^2 \frac{x^2 \cdot 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} dx + \int_{-2}^2 \frac{x^2 \cdot 2^x}{2^x + 2^{-x}} dx \\ &= \int_{-2}^2 \frac{x^2 \cdot (2^x + 2^{-x})}{2^x + 2^{-x}} dx = \int_{-2}^2 x^2 dx \\ &= 2 \int_0^2 x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\ &= 2 \cdot \frac{8}{3} \quad \therefore \quad \underline{\underline{I = \frac{8}{3}}} \end{aligned}$$

⑮3 次方程式

○原則

1. ◆因数定理

1 次式 $x - a$ が整式 $P(x)$ の因数である。

$\Leftrightarrow$

$$P(a) = 0$$

◆2 次方程式と判別式

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) の判別式を D とおくと

$D > 0 \Leftrightarrow$ 2 次方程式は、異なる 2 つの実数解を持つ。

$D = 0 \Leftrightarrow$ 2 次方程式は、ただ 1 つの実数解(重解)を持つ。

$D < 0 \Leftrightarrow$ 2 次方程式は、実数解を持たない。

○解答・解説

【方針】

方程式を解く場合に、まず因数分解ができないかどうか考えます。与えられた 3 次方程式の形に注目すると、 $x = -k$ がひとつの解であることが分かり、 $x + k$ を因数に持ちます。因数分解の結果、2 次方程式が現れ、この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解を持てばよいので、判別式が正となることを用います。

【解説】

$f(x) = x(x^2 - 4k + 4) + k(k - 2)^2$ とおきます。

$$\begin{aligned} f(-k) &= -k\{(-k)^2 - 4k + 4\} + k(k - 2)^2 \\ &= -k(k^2 - 4k + 4) + k(k - 2)^2 \\ &= -k(k - 2)^2 + k(k - 2)^2 = 0 \end{aligned}$$

因数定理より、 $f(x)$ は $x + k$ を因数に持つので

$$f(x) = (x + k)\{x^2 - kx + (k - 2)^2\}$$

よって、与えられた方程式は

$$\begin{aligned} (x + k)\{x^2 - kx + (k - 2)^2\} &= 0 \\ x + k &= 0, \quad x^2 - kx + (k - 2)^2 = 0 \cdots \text{①} \end{aligned}$$

k は実数なので $x = -k$ は実数解となり、2 次方程式①が実数解を持てばよいことになります。

判別式を D とおくと、①が実数解を持つ $\Leftrightarrow D \geq 0$ なので

$$\begin{aligned} D &= k^2 - 4(k - 2)^2 \geq 0 \\ \{k + 2(k - 2)\}\{k - 2(k - 2)\} &\geq 0 \\ (3k - 4)(-k + 4) &\geq 0 \\ (3k - 4)(k - 4) &\leq 0 \\ \frac{4}{3} &\leq k \leq 4 \end{aligned}$$

よって求める k の値の範囲は、 $\frac{4}{3} \leq k \leq 4$