聖マ 2014　数学

配点　　合計 100 点

1〔1〕8 点　〔2〕8 点　〔3〕9 点　　計 25 点

2〔1〕16 点　〔2〕9 点　　計 25 点

3〔1〕7 点　〔2〕7 点　〔3〕11 点　　計 25 点

4〔1〕10 点　〔2〕15 点　　計 25 点

聖マリアンナ医科大学入試問題

2014 年数学

解答・解説編

①小問集合

〔1〕定積分

○原則

1．　◆2 線で囲まれた部分の面積

$a \leqq x \leqq b$においてて$f(x) \geqq g(x)$とします。

$a \leqq x \leqq b$において、$y = f(x), y = g(x)$ で囲まれた部分の面積を$S(x)$とすると、

$$S(x) = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\, dx$$

2．　◆指数関数の微分

$a \neq 0$とします。

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \log_e a$$

○解答・解説

【方針】

直線や曲線で囲まれた部分の面積を求めるためにグラフを図示し、**原則 1** を用いて定積分を行います。

【解説】

y軸$(x = 0)$と$x = 10$によって積分範囲が$0 \leqq x \leqq 10$と決まります。
次に**原則 1** を用いるために$f(x)$とx軸$(y = 0)$との大小関係を調べます。
$f(x) = a^x \log_e a$について、
$a > 1$なので
$a^x > 0$かつ$\log_e a > 0$
従って　$f(x) > 0$
よって$y = f(x)$, $x = 10$, x軸$(y = 0)$, y軸$(x = 0)$

で囲まれた部分の面積は右図の青い部分です。

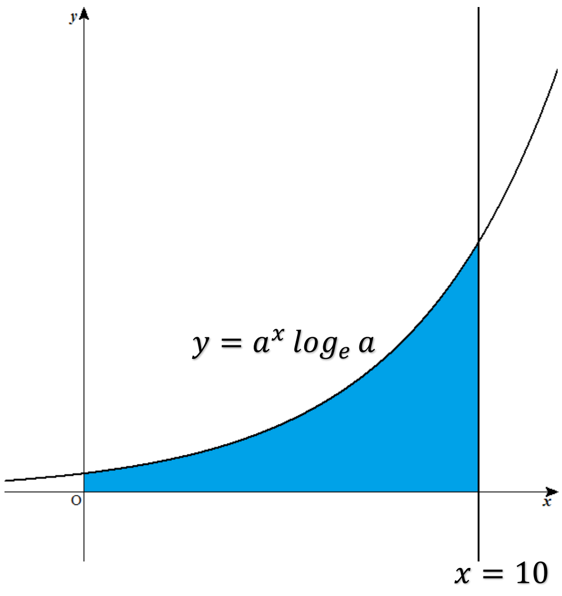
∴求める面積をSとすると、

$$S = \int_0^{10} \{f(x) - 0\}\,dx \qquad (\leftarrow \textbf{原則 1})$$

$$= \int_0^{10} a^x \log_e a\,dx$$

$$= [a^x]_0^{10} \qquad (\leftarrow \textbf{原則 2 の逆})$$

$$= a^{10} - a^0 = a^{10} - 1$$



〔2〕三角比の計算、交代式

○原則

1．　◆交代式

交代式とは、文字を入れ替えると符号が入れ替わる式のことです。文字が 2 つの場合、

$\pm f(x, y) = \mp f(y, x)$　　(複号同順)

となる$f(x, y)$のことを言います。

例)　$f(x, y) = x - y$のとき、$f(y, x) = y - x = -f(x, y)$

文字が 2 つの交代式は$x - y$を因数に持ちます。

2．　◆三角比の基本公式

Ⅰ)　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Ⅱ)　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Ⅲ)　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

◯解答・解説

【方針】

与条件$\sin x-\cos x$と、求める式$\sin^4 x-\cos^4 x$はどちらも$\sin x$と$\cos x$の交代式になっています。既知の値$\sin x-\cos x=\frac{1}{2}$を代入するために、交代式の性質（**原則１**）により$\sin^4 x-\cos^4 x$を$\sin x-\cos x$が現れるように因数分解します。三角関数に関する求値問題なので、三角関数の基本公式(**原則２**のⅠ)を使うことも頭に入れておきましょう。

【解説】

$\sin^4 x-\cos^4 x$を、$\sin x-\cos x$が現れるように因数分解します。

$$\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)$$

$$=\sin^2 x-\cos^2 x \qquad (\because \sin^2 x+\cos^2 x=1)\left(\leftarrow \textbf{原則２のⅠ}\right)$$

$$=(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)$$

$$=(\sin x+\cos x)\times\frac{1}{2} \quad —(\mathbf{A}) \qquad \left(\because \sin x-\cos x=\frac{1}{2}\right)$$

与条件$\sin x-\cos x=\dfrac{1}{2}$と基本公式$\sin^2 x+\cos^2 x=1$から$\sin x+\cos x$の値を求めます。

①$(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x$

$$=1+2\sin x\cos x \qquad (\because \sin^2 x+\cos^2 x=1)$$

②$(\sin x-\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x$

$$=1-2\sin x\cos x \qquad (\because \sin^2 x+\cos^2 x=1)$$

$\sin x-\cos x=\dfrac{1}{2}$だから、②より

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-2\sin x\cos x \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x\cos x=\frac{3}{4}$$

これを①へ代入すると、

$$(\sin x+\cos x)^2=1+\frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad (\sin x+\cos x)^2=\frac{7}{4}$$

いま、$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$なので、$\sin x>0,\cos x>0$

従って、$\sin x+\cos x=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

これを(**A**)に代入します。

$$\therefore \sin^4 x-\cos^4 x=\frac{\sqrt{7}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

〔3〕数列

○原則

1．　◆等差数列の一般項

初項a_1、公差dの等差数列$\{a_n\}$の一般項は

$a_n=a_1+(n-1)\,d$

2．　◆等比数列の一般項

初項a_1、公比rの等比数列$\{a_n\}$の一般項は

$a_n=a_1r^{n-1}$

3．　◆等比数列の総和

一般項がr^n　$(r\neq 1)$で与えられる等比数列の総和は

$$\sum_{k=1}^{n} r^k=\frac{r(1-r^n)}{1-r}$$

○解答・解説

【方針】

数列$\{c_n\}$は（等差数列）×（等比数列）になっています。その総和S_nを求めるには、等比数列の公比rをかけ、rS_nとS_nとの差をとることが鉄則です。本問もその鉄則通りに計算します。

【解説】

まず、数列$\{c_n\}$の一般項を求めます。
数列$\{a_n\}$は初項2、公差7の等差数列なので、

$a_n=2+(n-1)\times 7$　　$\left(\leftarrow \textbf{原則 1}\right)$

$= 7n - 5$

また数列$\{b_n\}$は初項1、公比2の等比数列なので、

$b_n = 1 \times 2^{n-1}$　　$\left(\leftarrow \textbf{原則 2}\right)$

$= 2^{n-1}$

従って、

$c_n = a_n b_n = (7n-5) \times 2^{n-1}$

ここで、【方針】で述べたことを行います。

$S_n = 2 \times 2^0 + 9 \times 2^1 + 16 \times 2^2 + \cdots + \{7(n-1)-5\} \times 2^{n-2} + (7n-5) \times 2^{n-1}$

$2S_n = \qquad 2 \times 2^1 + 9 \times 2^2 \ + \qquad \cdots \qquad + \{7(n-1)-5\} \times 2^{n-1} + (7n-5) \times 2^n$

上の 2 式の差をとると

$-S_n = 2 \times 2^0 + 7 \times 2^1 + 7 \times 2^2 + \cdots + 7 \times 2^{n-1} - (7n-5) \times 2^n$

$= 2 + 7(2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) - (7n-5) \times 2^n$

赤い部分は初項2、公比2の等比数列になっています。したがって、

$$-S_n = 2 + 7\sum_{k=1}^{n-1} 2^k - (7n-5) \times 2^n$$

$$= 2 + 7 \times \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} - (7n-5) \times 2^n$$

$$= 2 - 7 \times (2 - 2^n) - (7n-5) \times 2^n$$

$$= -(7n-12) \times 2^n - 12$$

$\therefore S_n = (7n-12) \times 2^n + 12$

次に$S_n = 133132$となるときのnを求めます。

求めたS_nより、

$(7n-12) \times 2^n + 12 = 133132 \quad \Leftrightarrow \quad (7n-12) \times 2^n = 133120$

これより133120は2^nの倍数であることが分かるので、133120を素因数分解します。

$133120 = 2^{11} \times 5 \times 13$

これより$n = 11$が解であると推測できます。

$$\begin{cases} 2^n = 2^{11} \\ 7n - 12 = 5 \times 13 \end{cases}$$

2 式の解はいずれも$n = 11$となるので、推測は正しいことが分かります。

解が$n = 11$以外に無いことを示す必要があります。

$7n-12\,,2^n$はいずれもnについて単調に増加するので、あるS_nの値に対して、nはただ一つに決まります。つまり、同じS_nになるnが複数存在することはありません。

$\therefore n=11$

②行列

○原則

1． ◆ケーリー・ハミルトンの定理

二次正方行列を$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$とすると、

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

この定理は主にAの次数を下げるときに用いられます。

○解答・解説

【方針】

〔1〕A^2が与えられた成分となるようにAの成分を求める問題なので、A^2の成分をb,c,dで表し、連立方程式を解いてb,c,dを決定します。次に「A^2やA^5をAとEで表しなさい」とあるので、ケーリー・ハミルトンの定理（**原則１**）を用います。

〔2〕条件式の形と、求める値が$a+d$であることから、ケーリー・ハミルトンの定理（**原則１**）を用いることを考えます。AがEの定数倍であるときと、そうでないときで場合分けする必要があります。

【解説】

〔1〕$a=3$のとき、

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times 3+b\times c & 3\times b+b\times d \\ c\times 3+d\times c & c\times b+d\times d \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} bc+9 & b(3+d) \\ c(3+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

いま、$A^2=\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$なので、

$$\begin{pmatrix} bc+9 & b(3+d) \\ c(3+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

従って、

$$\begin{cases} bc+9=11 & —(\mathbf{1}) \\ b(3+d)=10 & —(\mathbf{2}) \\ c(3+d)=5 & —(\mathbf{3}) \\ bc+d^2=6 & —(\mathbf{4}) \end{cases}$$

$(\mathbf{1})$と$(\mathbf{4})$に共通項bcが、$(\mathbf{2})$と$(\mathbf{3})$に共通項$3+d$があるので、それらを組み合わせて計算します。

$(\mathbf{1})-(\mathbf{4})$より、

$9-d^2=5 \Leftrightarrow d^2=4$

$\Leftrightarrow d=\pm 2 \quad —(\mathbf{5})$

$(\mathbf{2}),(\mathbf{3})$の式から$b,c\neq 0$ および $3+d\neq 0$なので$(\mathbf{2})\div(\mathbf{3})$より、

$\dfrac{b}{c}=2 \Leftrightarrow b=2c \quad —(\mathbf{6})$

これを$(\mathbf{1})$に代入して、

$2c^2+9=11 \Leftrightarrow c^2=1 \Leftrightarrow c=\pm 1$

ここで、$(\mathbf{5})$より$3+d>0$なので、$(\mathbf{3})$より

$c>0$である必要があります。

$\therefore c=1$

これを$(\mathbf{6})$に代入して

$b=2$

また$c=1$を$(\mathbf{3})$に代入して

$3+d=5 \Leftrightarrow d=2$

これは$(\mathbf{5})$を満たすので適です。

$\therefore b=2\,, c=1\,, d=2$

次にA^2をAとEで表します。ケーリー・ハミルトンの定理より

$A^2-(3+2)A+(3\times 2-2\times 1)E=O$

$\Leftrightarrow A^2-5A+4E=O$

$\Leftrightarrow A^2=5A-4E \quad —(*)$

次にA^5をAとEで表します。A^2が現れたら$(*)$を用いてA次数を下げていきます。

$A^5=(A^2)^2A$

$=(5A-4E)^2A \quad (\because (*))$

$=(25A^2-40A+16E)A$

$=\{25(5A-4E)-40A+16E\}A \quad (\because (*))$

$= (85A - 84E)A$

$= 85A^2 - 84A$

$= 85(5A - 4E) - 84A \qquad (\because (*))$

$= 341A - 340E$

これを成分で表します。

$A^5 = 341\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 340\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 341 \times 3 - 340 & 341 \times 2 \\ 341 & 341 \times 2 - 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 683 & 682 \\ 341 & 342 \end{pmatrix}$

〔2〕A^2を、ケーリー・ハミルトンの定理（**原則１**）によりAとEで表します。

$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$

$\Leftrightarrow A^2 = (a + d)A - (ad - bc)E$

いま、$\mathrm{A}^2 = 3A - 2E$だから

$(a + d)A - (ad - bc)E = 3A - 2E \qquad$—(※)

ここでAがEの定数倍であるときとそうでないときで場合分けが生じます。

AがEの定数倍でないときにはAとEの係数を比較することが出来ます。

つまり$A \neq kE$(k: 実数)のとき、(※)のAとEの係数を比較して

$$\begin{cases} a + d = 3 \\ ad - bc = 2 \end{cases}$$

この２式を満たすa, b, c, dが存在することを、適当な例を挙げて示します。

例えば、$a = 1, b = 0, c = 0, d = 2$のとき、$A \neq kE$かつ２式が成立します。

$\therefore a + d = 3$

次に、AがEの定数倍である$(A = kE)$とき、

$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$なので、$a = k, b = 0, c = 0, d = k$

従って、$a + d = 2k, ad - bc = k^2$

これを(※)に代入して

$2k \times kE - k^2E = 3kE - 2E$

$\Leftrightarrow (2k^2 - k^2 - 3k + 2)E = O$

$\Leftrightarrow (k^2 - 3k + 2)E = O$

$\Leftrightarrow (k - 1)(k - 2)E = O$

よって、$k=1,2$

$k=1$のとき、$a+d=2$

$k=2$のとき、$a+d=4$

$\therefore a+d=2,3,4$

③楕円

○原則

1．　◆楕円の接線の方程式

楕円　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,b>0)$

上の点(s,t)における楕円の接線の方程式は

$$\frac{sx}{a^2}+\frac{ty}{b^2}=1$$

2．　◆点と直線の距離

点(s,t)と直線$ax+by+c=0$の距離をdとすると、

$$d=\frac{|sa+tb+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

○方針・解説

【方針】

〔1〕接点の座標を未知数でおき、楕円の接線の方程式(**原則１**)と傾きがmという条件からs,tを求めます。

〔2〕2 つのグラフの交点を求める問題なので、楕円の方程式と直線$y=mx$を連立させてx,yを求めます。

〔3〕〔1〕〔2〕で求めた接線、および直線を図示します。すると、囲まれた図形は平行四辺形であると分かります。〔1〕で求めた接線、および〔2〕で求めたP,Qの座標を利用することを考えると、線分PQで 2 分割して、P,Qの座標から線分PQの長さを求め、線分PQと接線の距離を求めれば面積の計算が出来ます。

【解説】

〔1〕

$C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

C上の点$(s,t)(s,t:$実数$)$における接線の方程式は

$\dfrac{sx}{a^2}+\dfrac{ty}{b^2}=1$　　—$(*)$　（← **原則 1**）

いま、(s,t)はC上にあるので、Cを満たします。よって、

$\dfrac{s^2}{a^2}+\dfrac{t^2}{b^2}=1$　　—$(\mathbf{1})$

また、$(*)$の傾きは$m>0$なので$t\neq 0$です。よって$(*)$を$y=ax+b$の形に変形すると、

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{sb^2}{ta^2}x+y=\dfrac{b^2}{t}$

$\Leftrightarrow y=-\dfrac{sb^2}{ta^2}x+\dfrac{b^2}{t}$　　—$(*)'$

xの係数が接線の傾きmに等しいので、

$-\dfrac{sb^2}{ta^2}=m$　　—$(\mathbf{2})$

$(\mathbf{1})(\mathbf{2})$からs,tを求めます。

$(\mathbf{2})$より

$\mathrm{s}=-\dfrac{ma^2}{b^2}t$　　—$(\mathbf{3})$

これを$(\mathbf{1})$に代入します。

$$\frac{\frac{m^2a^4}{b^4}t^2}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m^2a^2}{b^4}+\frac{1}{b^2}\right)t^2=1$$

$$\Leftrightarrow t^2=\frac{1}{\frac{m^2a^2}{b^4}+\frac{1}{b^2}}=\frac{b^4}{m^2a^2+b^2}$$

$$\therefore t=\pm\sqrt{\frac{b^4}{m^2a^2+b^2}}=\pm\frac{b^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}$$

これらを$(\mathbf{3})$に代入します。

$t=\dfrac{b^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}$のとき、$s=-\dfrac{ma^2}{b^2}\times\dfrac{b^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}=-\dfrac{ma^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}$

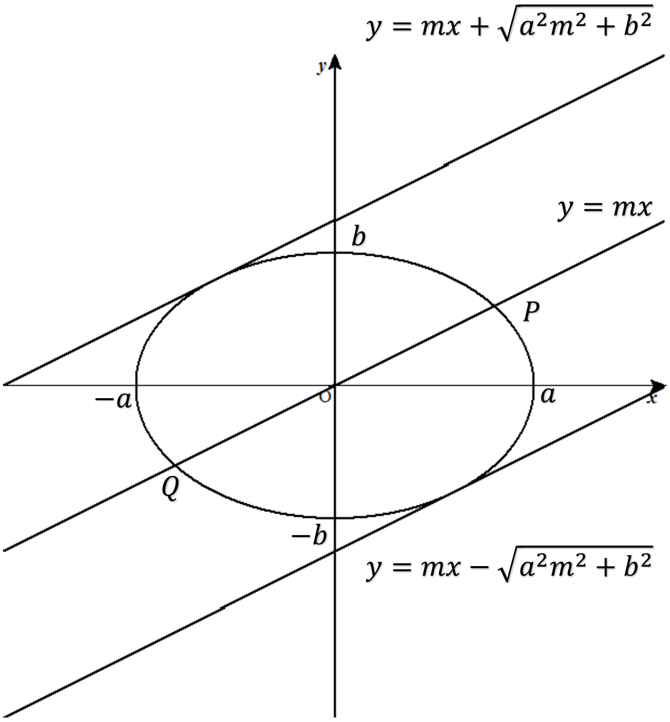
$t=-\dfrac{b^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}$のとき、$s=-\dfrac{ma^2}{b^2}\times\left(-\dfrac{b^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}\right)=\dfrac{ma^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}$

よって$(s,t)=\left(\dfrac{b^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}},-\dfrac{ma^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}\right),\left(-\dfrac{b^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}},\dfrac{ma^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}\right)$

$\therefore s,t$を$(*)'$に代入すると、求める接線の方程式は傾きがmだから、

$$y=mx+\frac{b^2}{\pm\frac{b^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}}\Leftrightarrow \quad y=mx\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$$

〔2〕2 つのグラフの式を連立させます。



$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \qquad —(\mathbf{1})$

$y=mx \qquad —(\mathbf{2})$

$(\mathbf{2})$を$(\mathbf{1})$に代入します。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2}{b^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)x^2=1$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}=\frac{a^2b^2}{a^2m^2+b^2}$$

$$\therefore x=\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$$

Pのx座標は正なので、Pのx座標が$\dfrac{ab}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}(\because ab>0)$、$Q$の$x$座標が

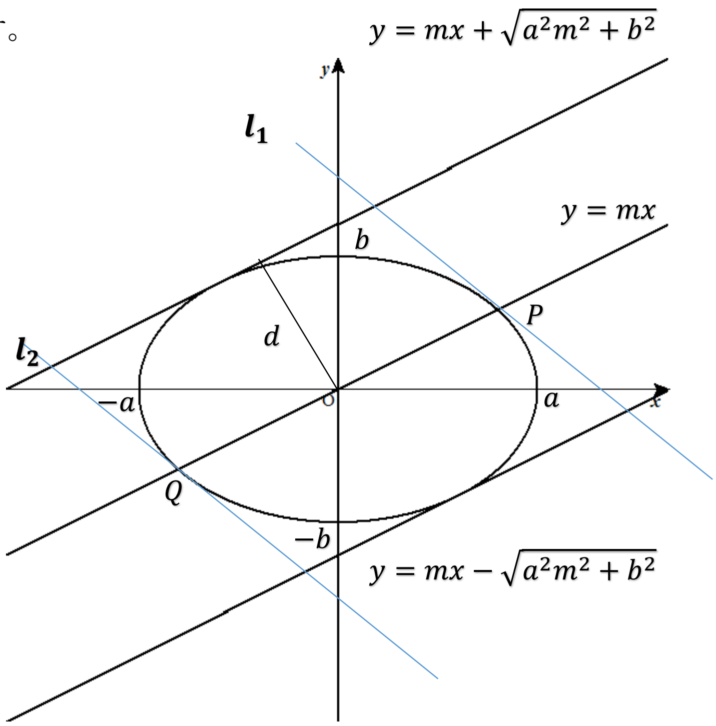
$-\dfrac{ab}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$となります。

$(\mathbf{2})$より、それぞれのy座標はx座標をm倍すればよいので、

$$\mathrm{P}\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},\frac{mab}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)\quad Q\left(-\frac{ab}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},-\frac{mab}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$$

〔3〕

P,Qにおける楕円の接線をそれぞれl_1,l_2とします。



楕円は点対称な図形であり、〔2〕の答えより、点P,Qも原点に関して点対称な位置にあるので、l_1,l_2は平行です。

よって〔1〕で求めた2接線とl_1,l_2で囲まれる図形は平行四辺形になります。

この面積を求めるために、【方針】で述べた通り、線分PQで2分割して考えます。分割された上の部分と下の部分は合同な平行四辺形なので、上の部分の面積だけを求め、2倍します。

線分PQより上の部分の平行四辺形の面積を

$\dfrac{S}{2}$とし、$y=mx$と$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$の距離をdとすると、

$$\frac{S}{2}=PQ\times d$$

ここで、

$$PQ=2OP=2\sqrt{\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{mab}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)^2}$$

$$=2\sqrt{(1+m^2)\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)^2}$$

$$=\frac{2ab\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$$

また、dは原点Oと接線$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$との距離でもあるので、

$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}\Leftrightarrow mx-y+\sqrt{a^2m^2+b^2}=0$　と変形すると、

$$d=\frac{\left|0\times1+0\times(-1)+\sqrt{a^2m^2+b^2}\right|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$$　(← **原則2**)

$$=\frac{\left|\sqrt{a^2m^2+b^2}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}}$$

従って、

$$\frac{S}{2}=\frac{2ab\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\times\frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}}=2ab$$

$\therefore S=4ab$

④対数不等式、領域

○原則

1．　◆底の変換公式

$a,b,c>0, a\neq 1, c\neq 1$のとき、

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

2．　◆対数の性質

$a,b,c>0, a\neq 1$とします。

Ⅰ）$\log_a bc=\log_a b+\log_a c$

Ⅱ）$\log_a \frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$

3．　◆真数の大小関係

$a,b,c>0, a\neq 1$とします。

$\log_a b<\log_a c$のとき、

$0<a<1$なら　　$b>c$

$a>1$なら　　$b<c$

○方針・解説

【方針】

〔1〕与えられた不等式を全て$X=\log_a b$で書き換える問題です。与えられた不等式は底が揃っていないので、まず底の変換公式（**原則１**）で全ての対数の底をaに揃え、**原則２**を利用して$\log_a b$のみで

表します。

〔2〕〔1〕で変形した不等式は全て因数分解されいてる状態なので、Xの値によってそれぞれの因数の正負を考えることで左辺の正負が決まります。

【解説】

〔1〕$\log_{ab} a < \log_{\frac{a}{b}} ab \Leftrightarrow \log_{ab} a - \log_{\frac{a}{b}} ab < 0$

底の変換公式（**原則１**）より

$$\frac{\log_a a}{\log_a ab} - \frac{\log_a ab}{\log_a \frac{a}{b}} < 0 \quad \Leftrightarrow \frac{\log_a a}{\log_a a + \log_a b} - \frac{\log_a a + \log_a b}{\log_a a - \log_a b} < 0 \qquad \left(\leftarrow \textbf{原則２}\right)$$

$\log_a a = 1$だから、

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + \log_a b} - \frac{1 + \log_a b}{1 - \log_a b} < 0$$

$\log_a b = X$とすると、

$$\frac{1}{1 + X} - \frac{1 + X}{1 - X} < 0$$

左辺を通分します。

$$\frac{(1 - X) - (1 + X)(1 + X)}{(1 + X)(1 - X)} < 0$$

$$\frac{-X^2 - 3X}{(1 + X)(1 - X)} < 0$$

$$\therefore \frac{-X(X + 3)}{(1 + X)(1 - X)} < 0$$

〔2〕

$\dfrac{-X(X + 3)}{(1 + X)(1 - X)} < 0$ の両辺を -1 倍します。

$$\frac{X(X + 3)}{(1 + X)(1 - X)} > 0$$

$f(X) = \dfrac{X(X + 3)}{(1 + X)(1 - X)}$ として、$f(X)$の正負をXの値によって考えます。

$X = \log_a b$かつ$ab \neq 1$、$\frac{a}{b} \neq 1$なので、Xは-1と1を除く全実数をとります。

X	…	-3	…	-1	…	0	…	1	…
$f(X)$	$-$	0	$+$	×	$-$	0	$+$	×	$-$

表より、$f(X) > 0$を満たすのは、$-3 < X < -1\,,0 < X < 1$となります。

ここで、$X = \log_a b$より

$-3 < \log_a b < -1\,,0 < \log_a b < 1$

整数を、底がaの対数で表します。

$\log_a a^{-3} < \log_a b < \log_a a^{-1}\ ,\log_a a^0 < \log_a b < \log_a a^1$

真数の大小を比較するには、底の値によって場合分けが必要です。(**原則 3**)

(ⅰ)$0 < a < 1$のとき

$a^{-3} > b > a^{-1}\,,1 > b > a$

(ⅱ)$a > 1$のとき

$a^{-3} < b < a^{-1}\,,1 < b < a$

(ⅰ)(ⅱ)より、不等式$f(x) > 0$を満たす点(a,b)の存在領域は下図の通りです。ただし、境界線は全て除きます。