

Q.(基礎問題精講数学 3 P209 演習 114)

解説の補助をお願いします。

A,

(1)不等式の証明は 2 つの辺のうち大きい方から小さい方を引いて 0 以上となる(または 0 より大きい)ことを計算で確かめるのが最もオーソドックスな解法です。3 つの不等式に関してはまずは第 1 辺と第 2 辺について、次に第 2 辺と第 3 辺についてそれぞれ引き算をします。

$$(\text{第 2 辺}) - (\text{第 1 辺}) = e^x - 1$$

このままではこの値が $0 \leq x \leq 1$ で 0 以上になるか分からないので増減を調べる必要があります。

$$f(x) = e^x - 1 \quad (0 \leq x \leq 1) \text{ とします。}$$

$$f'(x) = e^x > 0 \text{ なので } f(x) \text{ は単調に増加します。}$$

ということは $f(x)$ が最も小さくなるのは $x=0$ のときなので、 $f(0)$ が 0 以上であれば $0 \leq x \leq 1$ で常に $f(x) \geq 0$ であるといえます。

$$f(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\text{よって } f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq e^x$$

次に

$$(\text{第 3 辺}) - (\text{第 2 辺}) = e - e^x$$

これも増減を調べる必要があります。

$$g(x) = e - e^x \quad (0 \leq x \leq 1) \text{ とします。}$$

$$g'(x) = -e^x < 0 \text{ なので } g(x) \text{ は単調に減少します。}$$

ということは $g(x)$ が最も小さくなるのは $x=1$ のときなので、 $g(1)$ が 0 以上であれば $0 \leq x \leq 1$ で常に $g(x) \geq 0$ であるといえます。

$$g(1) = e - e^1 = e - e = 0$$

$$\text{よって } g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq e$$

以上より、 $0 \leq x \leq 1$ において

$$1 \leq e^x \leq e$$

(証明終わり)

【別解】

不等式の第1辺を $1 = e^0$ とみなすことができれば、各辺とも e の累乗の形になります。さらに e^x という指数関数は x について単調に増加する(x が大きければ大きいほど e^x も大きくなる)ことは有名なので、これらから一度に不等式を証明することができます。

$$1 = e^0, e = e^1 \text{なので}$$

$0 \leq x \leq 1$ において $e^0 \leq e^x \leq e^1$ を示せばよいことになります。

e^x は x について単調増加です。

よって $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$e^0 \leq e^x \leq e^1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq e^x \leq e$$

(証明終わり)

(2)

a_n の式は、(1)の不等式の第2辺 e^x に x^{2n-1} をかけて $x:0 \rightarrow 1$ で定積分したものです。(1)の不等式の成り立つ範囲も $0 \leq x \leq 1$ であったことから、(1)の不等式を利用して(2)の不等式を示せないか？と推測できます。

(1)の不等式を(2)に持つていくためにまず(1)の不等式の各辺に x^{2n-1} をかけます($n \geq 1$ かつ $0 \leq x \leq 1$ なので $x^{2n-1} \geq 0$)。次に第1辺と第3辺をそれぞれ $x:0 \rightarrow 1$ で定積分します。

(1)の不等式の各辺に $x^{2n-1} (\geq 0)$ をかけます。

$x^{2n-1} \leq x^{2n-1}e^x \leq x^{2n-1}e \leftarrow$ 同じ正の値をかけるので大小関係は変わりません

第1辺を $x:0 \rightarrow 1$ で定積分します。

$$\int_0^1 x^{2n-1} dx = \left[\frac{x^{2n}}{2n} \right]_0^1 = \frac{1^{2n}}{2n} - \frac{0^{2n}}{2n} = \frac{1}{2n}$$

同じく第3辺を $x:0 \rightarrow 1$ で定積分します。

$$\int_0^1 x^{2n-1} e dx = \left[\frac{x^{2n} e}{2n} \right]_0^1 = \frac{1^{2n} e}{2n} - \frac{0^{2n} e}{2n} = \frac{e}{2n}$$

以上より、不等式の各辺を $x:0 \rightarrow 1$ で定積分すると、

$$\frac{1}{2n} < \int_0^1 x^{2n-1} e^x dx < \frac{e}{2n}$$

(※)P209 のポイントより、各辺が $0 \leq x \leq 1$ で常には等号が成り立たないので、等号が外れることに注意しましょう。

$$a_n = \int_0^1 x^{2n-1} e^x dx \text{ なので}$$

$$\frac{1}{2n} < a_n < \frac{e}{2n}$$

(証明終わり)