# 女子医 2014 物理

**配点**　　合計 100 点

Ⅰ　計 35 点

（1）8 点　（2）6 点　（3）6 点　（4）15 点

Ⅱ　計 30 点

（1）7 点

（2）ア 7 点　イ 8 点

（3）8 点

Ⅲ　計 35 点

（1）2 点×9 問

（2）8 点

（3）9 点

［Ⅰ］　斜方投射された物体との弾性衝突と振り子の運動

## ○原則

1.◆斜方投射

斜方投射では、運動を水平方向と鉛直方向に分解してそれぞれを考えます。

2. ◆等加速度直線運動の 3 公式

(a) $v = v_0 + at$

(b) $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

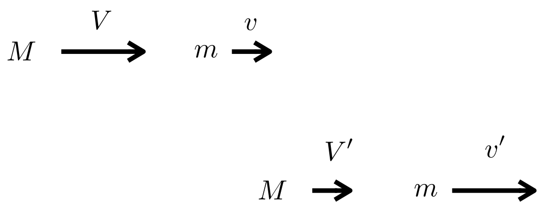
(c) $v^2 - v_0^2 = 2ax$

3. ◆力学的エネルギー保存の法則
保存力のみが働くとき、運動エネルギーと位置エネルギーの和である力学的エネルギーは保存します。

運動エネルギーは、質量$m$の物体が速さ$v$で運動するとき、$\frac{1}{2}mv^2$と表されます。

位置エネルギーは、基準面からの高さ$h$において、重力加速度を$g$とすると$mgh$と表されます。

4. ◆運動量保存の法則
系の物体に内力が働くが、外力が働かないとき、運動量の総和が保たれます。
すなわち、下図の状況のとき、運動量保存の法則
$MV + mv = MV' + mv'$
が成り立ちます。




5. ◆円運動の運動方程式
速度$v$、半径$r$で等速円運動する質量$m$の物体において、運動方向とは垂直の中心向きについて、運動方程式を立てます。$F = ma$において、$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$を代入すると、$F = m\frac{v^2}{r}$となります。$m\frac{v^2}{r}$は常に中心を向く向心力、$F$は物体に働く力で中心方向を正とすることに注意します。また、この方程式は、静止系から見た立場によるもので、物体とともに回転する系から見た立場とは区別されます。後者では、遠心力を考え、つり合いの式を立てます。式は前者と同じにな

ります。

○解答・解説

【方針】

(1)　斜方投射は、原則 1.に従い、運動を水平方向($x$軸方向)と鉛直方向($y$軸方向)に分解して考えます。A の座標$(x, y)$は時刻$t$をおいて、原則 2.(b)によってそれぞれ表します。最後に時刻$t$を消すことで軌跡の式($x$と$y$の関係式)が求まります。

(2)　(1)の結果を利用して、最高点を求めます。(1)の結果は$x$の 2 次関数なので、頂点が最高点となることがわかります。

[別解]　(1)を用いず、原則 2.を用いて解きます。

(3)　原則 5.に従い、円運動の運動方程式を立てます。図 2 のとき、張力$F$は中心方向ですが、重力による力も中心方向を向くことに注意します。結果の式は、円運動のある瞬間において成り立つため、$v$がその時点での物体の速さとなります。

(4)　$K_0 = \frac{1}{2}V_0^2$、$(x_0, y_0)$は (2)の結果より、$V_0$を求めればよいことがわかりますが、順を追って考えます。まず、(3)を用いて考えると、B が鉛直平面内で円運動をするためには、最も張力$F$が小さくなる$\theta = 180°$ $(g\cos 180° = -g)$で、$F \geqq 0$となればよいことがわかります。必要最小限では$F = 0$となります。ここから求まる$v$は最高点での小球 B の速さであることに注意します。次に、B の$(x_0, y_0)$と最高点について、原則 3.の力学的エネルギー保存の法則より式を立て、$(x_0, y_0)$における B の速さを求めます。そして、$(x_0, y_0)$における A と B の衝突を考えます。問題文より、A は弾性衝突した後、鉛直方向に落下したことから、衝突後の A の水平方向の速さは 0、従って、衝突直前の A の水平方向の速さは$v_2$となります。斜方投射では、水平方向の速さが変化しないことから、打ち上げ時の A の水平方向の速さも$v_2$、よって、$V_0 = \sqrt{2}v_2$となることがわかります。以上より、$V_0$が求まり、結果が得られます。

【解説】

(1)　打ち上げた時刻を 0 とし、時刻$t$での小球 A の$x$座標と$y$座標を考えます。水平方向へは初速度$V_0\cos 45°$の等速運動、鉛直方向へは初速度$V_0\sin 45°$、加速度$-g$の等加速度運動となるので、公式(原則 2.(b))を用いると

$x=(V_0\cos 45°)t$

$\therefore x=\frac{\sqrt{2}}{2}V_0 t$……①

$$y=(V_0\sin 45°)t+\frac{1}{2}(-g)t^2$$

$\therefore y=\frac{\sqrt{2}}{2}V_0 t-\frac{1}{2}gt^2$……②

①、②より$t$を消去すると

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}V_0\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}V_0}-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}V_0}\right)^2=-\frac{g}{V_0^2}x^2+x\cdots(\text{答})$$

(2)　(1)より

$$y=-\frac{g}{V_0^2}\left(x-\frac{V_0^2}{2g}\right)^2+\frac{V_0^2}{4g}$$

よって、最高点は$(x_0,y_0)=\left(\frac{V_0^2}{2g},\frac{V_0^2}{4g}\right)\cdots(\text{答})$

[別解]

最高点に達する時刻を$t_0$とおきます。最高点では鉛直方向の速度は 0 となるので、等加速度運動の公式(原則 2.(a))より

$0=V_0\sin 45°-gt_0$

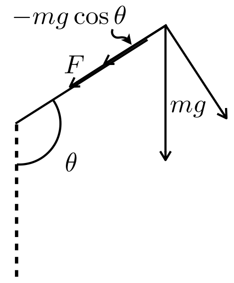
$$\therefore t_0=\frac{\sqrt{2}V_0}{2g}$$

よって

$$x_0=(V_0\cos 45°)t_0=\frac{V_0^2}{2g}$$

$$y_0=(V_0\sin 45°)t_0-\frac{1}{2}gt_0^2=\frac{V_0^2}{4g}$$

(3)　角$\theta$での円運動の運動方程式を立てると右図より




$$m\frac{v^2}{l} = F + (-mg\cos\theta)$$

$$\therefore F = m\left(\frac{v^2}{l} + g\cos\theta\right) \cdots (答)$$

(4)　円運動を繰り返すためには$\theta = 180°$のとき、$F \geqq 0$であればよいから、最高点での小球 B の速さの最小値を$v_1$とし、(3)の式に$F = 0$と$\theta = 180°$を代入して

$$0 = m\left(\frac{v_1^2}{l} + g\cos 180°\right)$$

$$\therefore v_1 = \sqrt{gl}$$

点$(x_0, y_0)$での B の速さを$v_2$とおき、$(x_0, y_0)$と最高点について力学的エネルギー保存の法則を用いると

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mg\cdot(y_0 + 2l)$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{5}{2}mgl$$

$$\therefore v_2 = \sqrt{5gl}$$

問題文より水平方向の A と B の速度が衝突で交換されているので、運動量保存の法則により、A は衝突直前に水平方向に速さ$v_2$を持ちます。打ち上げ時の角度が$45°$であることから打ち上げ時の A の速さ$V_0$は$V_0 = \sqrt{2}v_2$となります。よって

$$K_0 = \frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}v_2\right)^2 = 5mgl \cdots (答)$$

(2)の$(x_0, y_0)$に$V_0 = \sqrt{2}v_2$を代入して

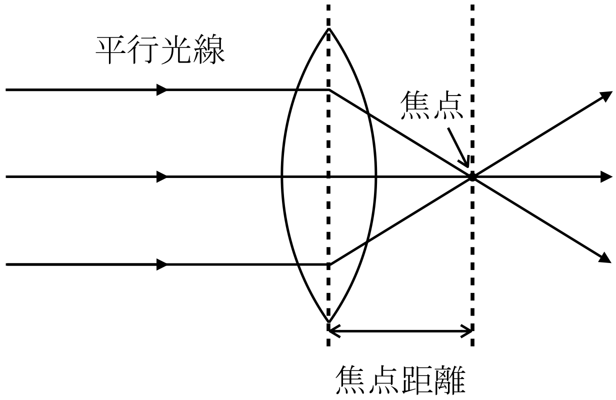
$$x_0 = \frac{1}{2g} \times 2 \times 5gl = 5l \cdots (答)$$

$$y_0 = \frac{1}{4g} \times 2 \times 5gl = \frac{5}{2}l \cdots (答)$$

［Ⅱ］　凸レンズによる像の位置と作図

## ○原則

1. ◆焦点と焦点距離

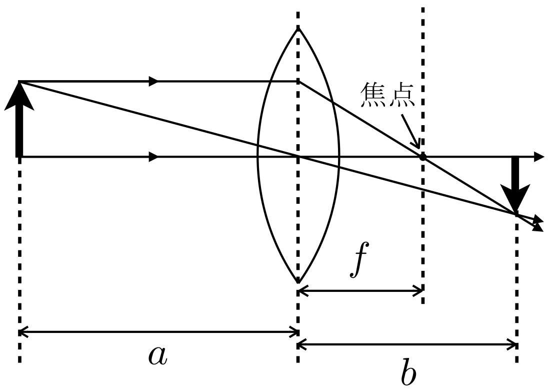



2. ◆写像公式

下図のように、物体から凸レンズまでの距離を$a$、凸レンズから像までの距離を$b$、凸レンズの焦点距離を$f$と置くと

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

が成り立ちます。また、$|a|>|f|$のとき、凸レンズに対して物体と反対側に実像が$(b>0)$、$|a|<|f|$のとき、凸レンズに対して物体と同側に虚像が$(b<0)$できます。




3. ◆倍率の公式

2.の図において、レンズの倍率は、$\left|\frac{b}{a}\right|$で表されます。

4. ◆凸レンズを通る光による像の作図
次の 2 本の線を描き、その交点が像の位置となります。
①物体から平行に伸び、凸レンズで屈折し、物体と反対側の焦点を通る線
②物体から凸レンズの中心を通り、そのまま直進する線

## ○解答・解説

【方針】

(1)　原則 1.の図について文章で説明します。

(2) (ア)　正負に注意して原則 2.の写像公式を用いて$a_0$と$f$について連立方程式を立てます。ともに実像であることから、$b$は正となります。
(イ)　(ア)より$f$がわかるので、同様に写像公式を用いて$a$を求めます。原則 3.の倍率の公式より倍率が求まります。また、作図は原則 4.を利用します。

(3)　原則 2.より、物体が焦点より凸レンズに近いとき、虚像ができます。(2)の作図と異なり、原則 4.における 2 本の直線は物体に対して凸レンズとの反対側で交わらず、物体と同側で交わり、像を作ります。目盛りがあるため、写像公式や倍率の公式を利用すると、より正確に描くことができます。

【解説】

(1)　凸レンズの焦点とは、レンズの光軸に平行に入射した光が凸レンズを通過後に集まる光軸上の点であり、焦点距離とはレンズの中心から焦点までの距離のことです。

(2) (ア)　各々の場合について、凸レンズの公式を用いると

$\frac{1}{a_0}+\frac{1}{20}=\frac{1}{f}$……①

$\frac{1}{a_0-10}+\frac{1}{30}=\frac{1}{f}$……②

①②の両辺は等しいので

$$\frac{1}{a_0}+\frac{1}{20}=\frac{1}{a_0-10}+\frac{1}{30}$$

両辺に$60a_0(a_0-10)$をかけて

$60(a_0-10)+3a_0(a_0-10)=60a_0+2a_0(a_0-10)$

$a_0(a_0-10)-600=0$

$(a_0-30)(a_0+20)=0$

$a_0=-20,30$

$a_0>0$であるので$a_0=30[\mathrm{cm}]\cdots$(答)

①に$a_0=30[\mathrm{cm}]$を代入して

$$\frac{1}{30}+\frac{1}{20}=\frac{1}{f}$$

両辺に$60f$をかけて

$2f+3f=60$

$\therefore f=12[\mathrm{cm}]\cdots$(答)

(イ)　凸レンズの公式を用いると

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{30}=\frac{1}{12}$$

両辺に$60a$をかけて

$60+2a=5a$

$3a=60$

$\therefore a=20[\mathrm{cm}]$

倍率の公式を用いると

$$m=\left|\frac{b}{a}\right|=\frac{30}{20}=1.5\text{ 倍}\cdots(\text{答})$$

結像は下図のようになります。

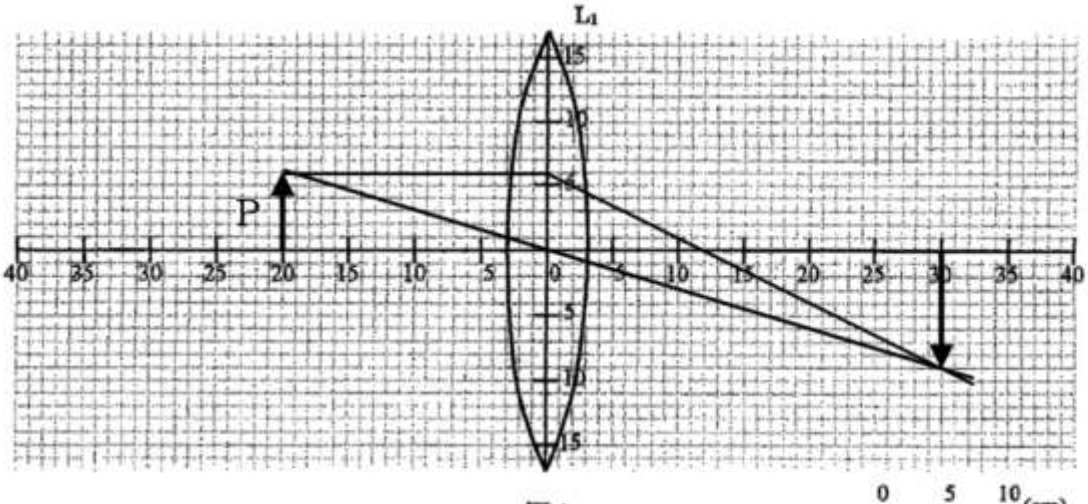


図 1

(3)　物体 Q について

図より$a = 6$マス、$f = 18$マスと読み取れるから、写像公式より

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{b} = \frac{1}{18}$$

両辺に$18b$をかけて

$$3b + 18 = b$$

$$\therefore b = 9\text{マス}$$

また、Q の大きさは 4 マスであるから倍率の公式より、像の大きさは

$$4 \times \left|\frac{b}{a}\right| = 4 \times \frac{9}{6} = 6\text{マス}$$

とわかります。従って、R は下図のようになります。

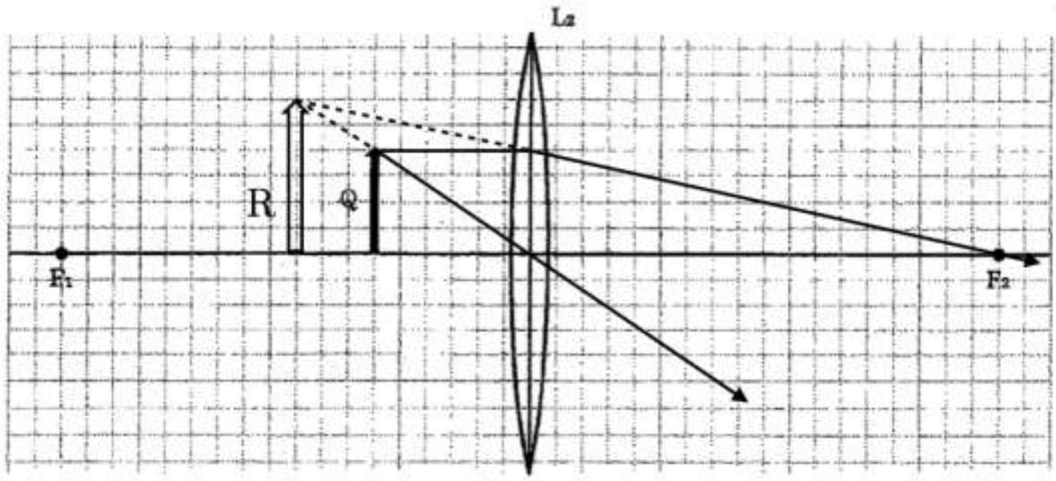



図 2

[Ⅲ]電磁界内での荷電粒子の運動

○原則

1. ◆電場の大きさと向き

静電気力を$\vec{F}$、荷電粒子の電気量を$q$、電場を$\vec{E}$とすると

$\vec{F} = q\vec{E}$

が成り立ちます。このとき、電荷の正負で向きが変わることに注意します。

2. ◆ローレンツ力の公式

磁場中を運動する荷電粒子が受ける力がローレンツ力です。ローレンツ力を$f$、荷電粒子の電気量を$q$、荷電粒子の速度を$v$、磁場と速度がなす角を$\theta$とすると

$f = qvB\sin\theta$

が成り立ちます。ローレンツ力は磁場、速度の両方に垂直な方向に働きます。

3. ◆等加速度直線運動の 3 公式

(a) $v = v_0 + at$

(b) $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

(c) $v^2 - v_0^2 = 2ax$

4. ◆円運動の運動方程式

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

5. ◆円運動の周期

周期$T$は

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

## ○解答・解説

【方針】

(1) 電界と磁界の違いに注意して解きます。

①②　電荷の正負に注意して原則 1.より求めます。

③④　一様な電界中では、粒子は同じ力を同じ向きに受けます。運動方程式より加速度が、等加速度直線運動の公式より、時刻や速度が求まります。

⑤　フレミング左手の法則より、正電荷の粒子の運動方向と垂直に力が働き、例えば電荷が原点に来たとき、$x$軸の正方向にローレンツ力を受けることがわかります。

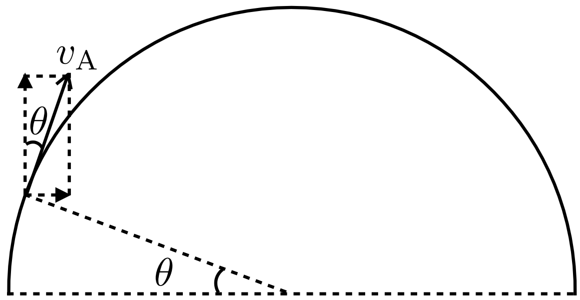
⑥　このとき荷電粒子には運動方向と常に垂直に力が働くため、速さは変化しません。従って、$y > 0$の領域において、粒子は原点での速さのまま一定になります。ローレンツ力を求めるには、原則 2.よりローレンツ力の公式を利用します。

⑦⑧　荷電粒子の運動方向と常に垂直に力が働くことから、粒子が円運動をすることに気づきます。⑦の結果はこの円運動の周期の半分であるから、原則 5.より周期を求めますが、半径$r$がわかりません。$r$を求めるために、原則 4. 円運動の運動方程式を立てます。

⑨　再び$y < 0$の領域に入るとき、粒子は$y$軸と平行に進入します。従って、④と同様に解きます。また、運動の対称性から 0 と考えることができます。

(2)　⑤⑨の方針をもとに軌跡を描きます。

(3)　粒子の速度の$y$成分について、時刻 0、$t_{\mathrm{C}}$で 0、$t_{\mathrm{A}}$では$v_{\mathrm{A}}$、$t_{\mathrm{B}}$では$-v_{\mathrm{A}}$がわかります。また、$0 \sim t_{\mathrm{A}}$、$t_{\mathrm{B}} \sim t_{\mathrm{C}}$では等加速度直線運動をするためグラフも直線になります。$t_{\mathrm{A}} \sim t_{\mathrm{B}}$は等速円運動を行い、下図より、このときの速度の$y$成分は$v_{\mathrm{A}} \cos\theta$となります。従って、グラフには cos の曲線を描きます。




【解説】

(1) ①　正電荷は電界と同じ向きに、負電荷は電界と反対の向きに力を受けます。したがって、同じ…(答)

②　電界から受ける力の大きさ$F$は公式より

$F = qE \cdots (答)$

③　粒子の加速度の大きさを$\alpha$とおき、$y$軸方向に運動方程式を立てると

$m\alpha = qE$

$\therefore \alpha = \dfrac{qE}{m}$

求める時間を$t$とおき、原則 3.(b)の等加速度直線運動の公式を用いると、変位は$a$であるから

$$a = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2$$

$$t^2 = \frac{2ma}{qE}$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{2ma}{qE}} \cdots (答)$$

④　求める速さを$v$とおき、原則 3.(a)の等加速度直線運動の公式と③の結果を用いると

$$v = \alpha t = \frac{qE}{m}\sqrt{\frac{2ma}{qE}} = \sqrt{\frac{2qEa}{m}} \cdots (答)$$

⑤　ローレンツ力は速度と垂直に働きます。したがって、垂直な…(答)

⑥　求める力の大きさを$f$とおき、原則 2.ローレンツ力の公式を用いると④の結果より

$$f = qvB = qB\sqrt{\frac{2qEa}{m}} \cdots (答)$$

⑦　回転半径を$r$とおき、原則 4.の円運動の運動方程式を立てると

$$m\frac{v^2}{r} = qvB$$

$$\therefore r = \frac{mv}{qB}$$

円運動の周期$T$は原則 5.より

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

求める時間$t'$は周期の半分となるので

$$t' = \frac{1}{2}T = \frac{\pi m}{qB}$$

⑧　$b$は円運動の直径となるので、⑦と④の結果より

$$b = 2r = \frac{2mv}{qB} = \frac{2m}{qB}\sqrt{\frac{2qEa}{m}} = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2mEa}{q}} \cdots (答)$$

⑨　正電荷に対して力は$y$軸の負方向に働くため、加速度は$-a$となります。求める速度を$v'$とおき、等加速度直線運動の公式と④の結果を用いると

$$(v')^2 - v^2 = 2\frac{qE}{m}(-a)$$

$v = \sqrt{\frac{2qEa}{m}}$より

$$v'^2 = -\frac{2qEa}{m} + \frac{2qEa}{m} = 0$$

$$\therefore v' = 0$$

(2)　粒子は原点 O で右向きにローレンツ力を受けて直径が$b$の等速円運動をします。

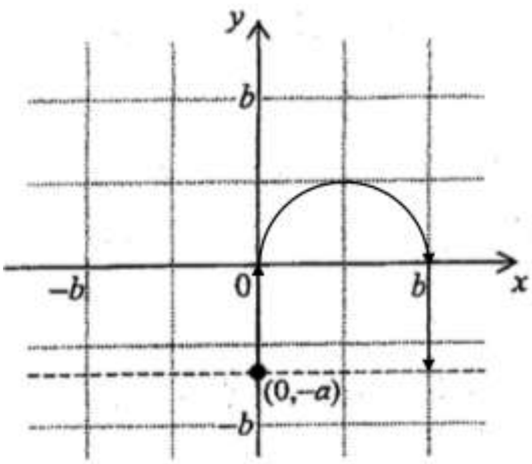



図 1

(3)　$0 \sim t_{\mathrm{A}}$は加速度一定で加速し、$t_{\mathrm{B}} \sim t_{\mathrm{C}}$は同じ大きさの加速度で減速します。また、$t_{\mathrm{A}} \sim t_{\mathrm{B}}$は等速円運動で、速度の$y$軸方向の成分は単振動と同じになります。

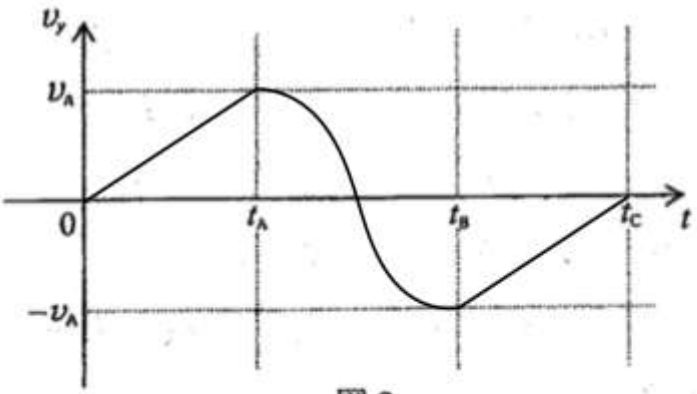



図 2