東京医科大学入試問題

2014年数学

解答・解説編

略解

$\boxed{1}$

(1)ア.8 イ.9 ウエ.16 オ.9 (2)カキ.32 クケ.15

$\boxed{2}$

(1)アイ.23 ウ.4 エ.3 オ.4 (2)カ.1 キ.5 クケ.-1 コ.2

$\boxed{3}$

(1)ア.4 イ.5 ウ.9 エ.5 (2)オカ.12 キ.5

$\boxed{4}$

(1)ア.1 イ.4 (2)ウエ.32 オカ.27

①小問集合

○原則

(1) ◆接線の方程式

関数$y=f(x)$上の点$(a,f(a))$ における接線の方程式は、

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

◆楕円の接線の方程式

楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点(x_1,y_1)における接線の方程式は、

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

◆2 直線の垂直条件

2 直線 $y=mx+n,\ y=m'x+n'$ が直交する $\Leftrightarrow m\cdot m'=-1$

(2) ◆直線と円が共有点を持つ条件

直線l：$ax+by+c=0$ と円C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$が共有点を持つとき、

Ⅰ）直線lと円の中心との距離dは、$d\leqq r$を満たす。

Ⅱ）直線lと円Cを連立して得られる 2 次方程式の判別式$D\geqq 0$

◆関数の最大値・最小値を求める

基本の考えは、グラフを書いてグラフから最大値・最小値を読み取ることです。その為に微分して増減表を書きます。

たまに、有名不等式(相加平均・相乗平均の関係など)を使って解くこともあります。

○解答・解説

(1)

【方針】

点 A が曲線C_2上の点であることから、方程式がひとつたちます。また、接線が直交することから、原則を利用して方程式がもうひとつたちます。それらを連立して$a,\ b$の値を求めます。

【解説】

2 つの接線が直交するので、それぞれの傾きを求めます。
まず、点 A におけるC_1の接線の傾きmは、

$$y' = \frac{1}{2}x \text{ より、} m = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

次に、曲線C_2の点 A における接線の方程式は、

$a \cdot 1 \cdot x + b \cdot \frac{1}{4} \cdot y = 1$ であり、$b = 0$ のときは、2 接線が直交しないので、$b \neq 0$

よって、傾き$m' = -\frac{4a}{b}$

直交条件から

$$mm' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4a}{b}\right) = -1$$

$$b = 2a \cdots ①$$

また、点 A は曲線C_2上の点なので、

$$a \cdot 1^2 + b \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1$$

$$a + \frac{b}{16} = 1 \cdots ②$$

①を②に代入して、

$$a + \frac{a}{8} = 1 \quad \therefore \underline{\ a = \frac{8}{9},\quad b = \frac{16}{9}\ }$$

(2)

【方針】

$\frac{y}{x} = m$ とおいて、$m + \frac{1}{m}$の最大値を求めます。その為に、微分して増減表を書きます。mの取り得る範囲に注意です。

【解説】

$\frac{y}{x} = m \cdots ①$ とおくと、$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{1}{m} + m$ より、

$$f(m) = \frac{1}{m} + m$$

とおいて、$f(m)$の最大値を求めていきます。
まず、mのとりうる範囲を考えましょう。

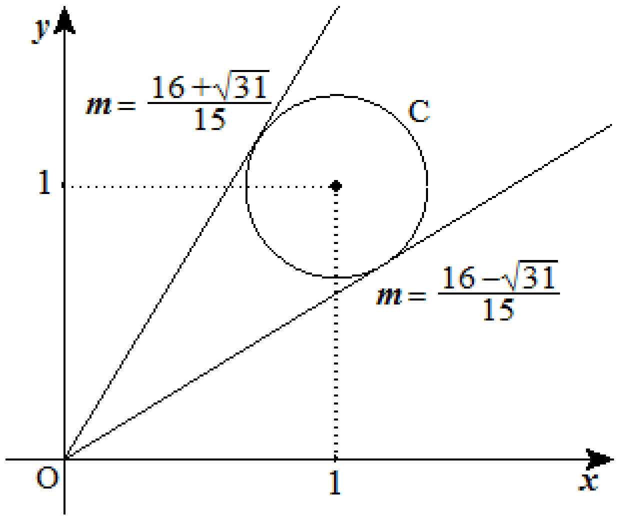
点 P は円 C 上の点なので、①より直線$y=mx$と円 Cが共有点を持つ条件から、

円 Cの中心$(1,\ 1)$と直線$mx-y=0$との距離が、円 Cの半径$\frac{1}{4}$以下となります。

従って、

$$\frac{|m\cdot 1-1|}{\sqrt{m^2+1}} \leqq \frac{1}{4}$$

$$4|\mathrm{m}-1| \leqq \sqrt{m^2+1}$$



両辺正なので 2 乗して、

$$16(m-1)^2 \leqq m^2+1$$

$$15m^2-32m+15 \leqq 0$$

$$\frac{16-\sqrt{31}}{15} \leqq m \leqq \frac{16+\sqrt{31}}{15}$$

次に、$f(m)$を微分して増減表を書きます。

$$f'(m)=-\frac{1}{m^2}+1=\frac{m^2-1}{m^2}=\frac{(m+1)(m-1)}{m^2}$$

ここで、$\alpha=\dfrac{16-\sqrt{31}}{15}$, $\beta=\dfrac{16+\sqrt{31}}{15}$ とします。

増減表から、最大値は$f(\alpha)$, $f(\beta)$が候補となります。

m	α	$\cdots$	1	$\cdots$	β
$f'(m)$		$-$	0	$+$	
$f(m)$		↘	極小	↗	

α, βは 2 次方程式$15m^2-32m+15=0$の解なので、解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=\frac{32}{15},\qquad \alpha\beta=1$$

このことを利用すると、

$$f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}+\alpha=\beta+\alpha=\frac{32}{15}$$

$$f(\beta)=\frac{1}{\beta}+\beta=\alpha+\beta=\frac{32}{15}$$

従って、最大値Mは、$M=\dfrac{32}{15}$

②小問集合

○原則

(1) ◆ベクトルの内積

$\vec{a}=(x_1, y_1)$, $\vec{b}=(x_2,\ y_2)$ のとき $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

◆三角関数の最大値・最小値

関数$y=f(x)$が三角関数で表されているとき、$f(x)$の最大値・最小値を求めるには次のことを考えます。

Ⅰ）三角関数の統一…sin, cos, tan のどれか一つに統一する。

Ⅱ）角度を揃える。

Ⅲ）合成する。

(2) ◆区分求積法

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

$$=\int_a^b f(x)dx$$

とくに、$a=0,\ b=1$のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

◆はさみうちの原理

数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, において、

$$b_n \leqq a_n \leqq C_n\ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

が成立して($b_n < a_n < C_n$ でもよい)、

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty} C_n=\alpha$$

ならば、数列$\{a_n\}$も収束して、

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$$

○解答・解説

(1)

【方針】

原則に従って、内積を計算します。出てきた式を、三角関数の積和の公式を使って変形します。

【解説】

$$\vec{p}=(3\cos t,\ 2\sin t),\quad \vec{q}=\left(3\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right),\ 2\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

より、

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\vec{q}&=9\cos t\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)+4\sin t\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\\&=9\cdot\frac{1}{2}\left\{\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{\pi}{3}\right\}+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\frac{\pi}{3}\right\}\\&=\frac{5}{2}\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{13}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin A\sin B&=-\frac{1}{2}\{\cos(A+B)-\cos(A-B)\}\\ \cos A\cos B&=\frac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}\end{aligned}}$$

$0\leqq t\leqq\pi$より、$\dfrac{\pi}{3}\leqq 2t+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{7\pi}{3}$

従って、

$$-1\leqq\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1$$

よって、

$$M=\frac{5}{2}\cdot 1+\frac{13}{4}=\underline{\frac{23}{4}}\qquad m=\frac{5}{2}\cdot(-1)+\frac{13}{4}=\underline{\frac{3}{4}}$$

(2)

【方針】

（前半） $a_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4$ となることから、区分求積法を使って計算します。

（後半）極限を求めるには、直接求める方法と、はさみうちの原理を用いる方法の 2 種類あります。はさみうちの原理を用いるためには、$\{b_n\}$を上からと下からの両方から不等式でおさえる必要があります。そこで、$\alpha-a_n$をある図形の面積とみて、その図形よりも小さい図形と大きい図形ではさみます。

別解として、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4$ が計算できれば(前半)(後半)共に、その結果を利用して計算する

ことができます。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ を計算するには、2 項定理を利用します。

【解説】

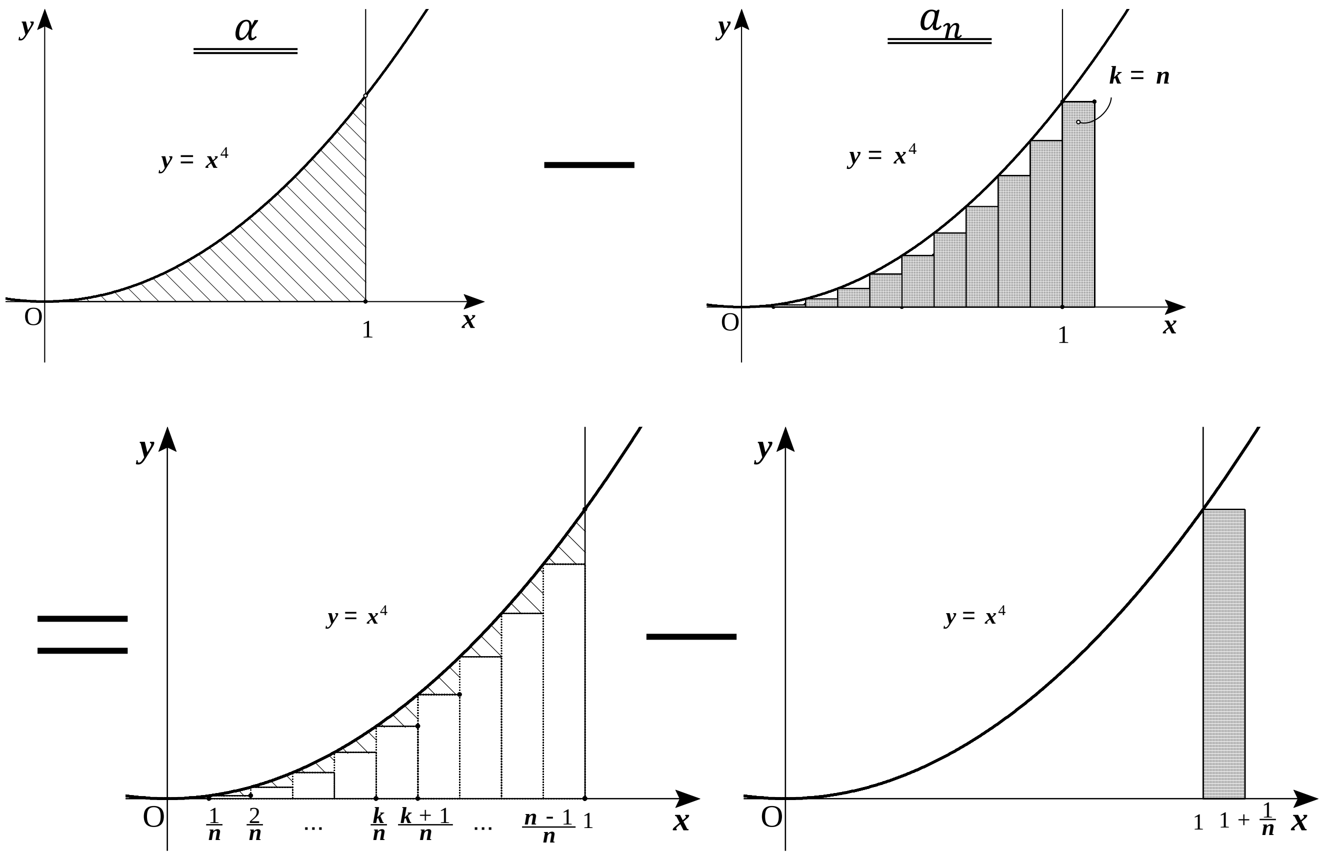
$$a_n = \frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4$$

より、区分求積法を使うと

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4 = \int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5} \quad \therefore \quad \underline{\alpha = \frac{1}{5}}$$

次に、$\alpha - a_n$の図形的な意味を考えてみます。

$$\alpha - a_n = \int_0^1 x^4\, dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4$$



S_1 =(斜線部の面積)　　S_2 =(網掛部の面積)

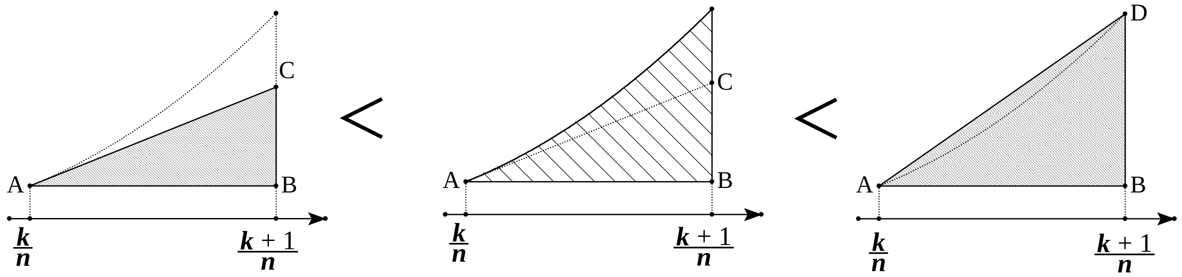
従って、$\alpha - a_n = S_1 - S_2$となります。
S_2は長方形の面積なので、

$$S_2 = \frac{1}{n} \times 1^4 = \frac{1}{n}$$

次に、S_1の面積を不等式で上下からはさむことを考えます。
ここで、

$$\mathrm{A}\left(\frac{k}{n},\ \left(\frac{k}{n}\right)^4\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{k+1}{n},\ \left(\frac{k}{n}\right)^4\right),\ \mathrm{D}\left(\frac{k+1}{n},\ \left(\frac{k+1}{n}\right)^4\right)$$

とします。図のように、$y = x^4$, $y = \left(\frac{k}{n}\right)^4$, $x = \frac{k+1}{n}$ で囲まれる図形を
その図形よりも、小さな三角形 ABC と大きな三角形 ABD ではさみうちにします。
ここで直線 AC は、点 A における$y = x^4$の接線です。関数$y = x^4$は、下に凸のグラフなので、接線は図のように$y = x^4$よりも下側にあります。



では、三角形 ABC の面積を求めます。

$y' = 4x^3$より、接線 AC の傾きは、$4\left(\frac{k}{n}\right)^3$ となるので、

$$\mathrm{BC} = \mathrm{AB} \times 4\left(\frac{k}{n}\right)^3 = \frac{1}{n} \times 4\left(\frac{k}{n}\right)^3$$

従って、

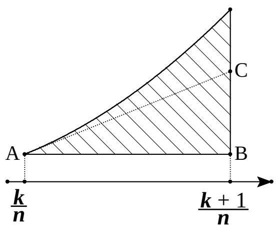
$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{BC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} 4\left(\frac{k}{n}\right)^3 = \frac{2}{n^2}\left(\frac{k}{n}\right)^3$$

次に、三角形 ABD の面積は、

$$\triangle\mathrm{ABD} = \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{BD} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \times \left\{\left(\frac{k+1}{n}\right)^4 - \left(\frac{k}{n}\right)^4\right\}$$

よって、

$$\frac{2}{n^2}\left(\frac{k}{n}\right)^3 \quad <$$



$$< \quad \frac{1}{2n}\left\{\left(\frac{k+1}{n}\right)^4 - \left(\frac{k}{n}\right)^4\right\}$$

ここで、辺々$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ まで足すと

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n^2}\left(\frac{k}{n}\right)^3 < S_1 < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n}\left\{\left(\frac{k+1}{n}\right)^4 - \left(\frac{k}{n}\right)^4\right\}$$

辺々、$S_2 = \dfrac{1}{n}$ を引いて

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n^2}\left(\frac{k}{n}\right)^3 - \frac{1}{n} < S_1 - S_2 < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n}\left\{\left(\frac{k+1}{n}\right)^4 - \left(\frac{k}{n}\right)^4\right\} - \frac{1}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n^2}\left(\frac{k}{n}\right)^3 - \frac{1}{n} < \alpha - a_n < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n}\left\{\left(\frac{k+1}{n}\right)^4 - \left(\frac{k}{n}\right)^4\right\} - \frac{1}{n}$$

$$2 \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^3 - 1 < (\alpha - a_n)n < \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{n}{n}\right)^4 - \left(\frac{0}{n}\right)^4\right\} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

ここで、左辺の極限を計算すると、

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\left\{2 \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^3 - 1\right\} = 2\int_0^1 x^3 dx - 1 = 2 \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$$

よって、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(\alpha - a_n)n = -\frac{1}{2}$$

[別解]

実際に、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ を計算して極限を求めます。

二項定理を使うと、

$$\begin{aligned}(k+1)^5 - k^5 &= k^5 + {}_5C_1 k^4 + {}_5C_2 k^3 + {}_5C_3 k^2 + {}_5C_4 k^1 + 1 - k^5 \\ &= 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1\end{aligned}$$

従って、両辺$k=1$からnまでの和をとって

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^5-k^5\}=\sum_{k=1}^{n}(5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)$$

$$(n+1)^5-1^5=5\sum_{k=1}^{n}k^4+10\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+10\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$+5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{5}\left\{(n+1)^5-\frac{5}{2}n^2(n+1)^2-\frac{5}{3}n(n+1)(2n+1)-\frac{5}{2}n(n+1)-n-1\right\}\cdots①$$

①をn^5で割るとa_nをnで表すことができますが、極限を求めるだけなので 4 次式以下の計算は省略できます。

$$a_n=\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{n^5}\cdot\frac{1}{5}\left\{(n+1)^5-\left(n\text{の 4 次式}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^5-\frac{(n\text{の 4 次式})}{n^5}\right\}$$

よって、

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{5}\{(1+0)^5-0\}=\frac{1}{5}$$

次に、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めます。

今度は、na_n より 4 次式以下の計算は省略します。

$$a_n=\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{n^5}\cdot\frac{1}{5}\left\{(n+1)^5-\frac{5}{2}n^2(n+1)^2-\left(n\text{の 3 次式}\right)\right\}$$

$$b_n=(\alpha-a_n)n$$

$$=\frac{1}{5}\cdot n-\frac{1}{5n^4}\left\{n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1-\frac{5}{2}n^2(n+1)^2-\left(n\text{の 3 次式}\right)\right\}$$

$$=\frac{n}{5}-\left\{\frac{n}{5}+1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{5n^4}-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{\left(n\text{の 3 次式}\right)}{n^4}\right\}$$

$$= -\left\{1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{5n^4} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{(n\text{の 3 次式})}{n^4}\right\}$$

よって、

$$\lim_{n \to \infty} b_n = -\left\{1 + 0 + 0 + 0 + 0 - \frac{1}{2} \cdot (1 + 0)^2 - 0\right\} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

③微分積分

○原則

(1) ◆接線の方程式

関数$y = f(x)$上の点$(a, f(a))$ における接線の方程式は、

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

(2) ◆回転体の体積計算

Ⅰ）$y = f(x)$をx軸まわりに回転したとき、

$$V = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2 dx$$

Ⅱ）$x = g(y)$をx軸まわりに回転したとき、

$$V = \int_a^b \pi\{g(y)\}^2 dy$$

○解答・解説

(1)

【方針】

原則に従って、微分して接線の方程式を求めます。

【解説】

$f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ とおきます。

$$f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$f'(4) = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 9}} = \frac{4}{5}$$

よって、点A(4, 5)における接線 L の方程式は、

$$y = \frac{4}{5}(x-4)+5 = \underline{\frac{4}{5}x + \frac{9}{5}}$$

(2)

【方針】

y軸の回りに 1 回転する図形を確認します。その図形から、求める立体の体積は、円錐の体積から曲線 Cによって得られる回転体の体積を引いたものになります。原則に従って、計算します。

【解説】

まず、どのような図形をy軸の回りに 1 回転させるのか確認しましょう。

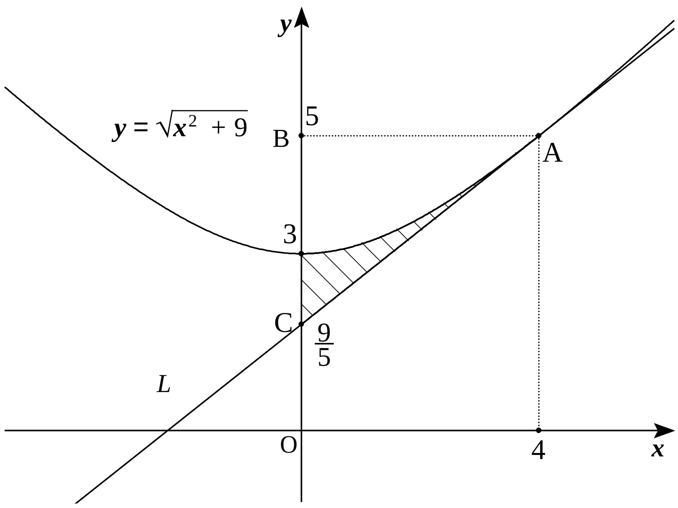
$y=\sqrt{x^2+9}$より、

$$y^2 = x^2 + 9 \ (y > 0)$$

$$y^2 - x^2 = 9 \ (y > 0)$$

つまり、曲線Cは双曲線$y^2 - x^2 = 9$の$y > 0$の部分です。

これらのことから、右図の斜線部の図形をy軸の回りに回転させます。



求める体積Vは、

△ABC をy軸の回りに 1 回転したときにできる円錐の体積をV_1

曲線 Cとy軸、$y=5$で囲まれる図形をy軸の回りに 1 回転したときにできる立体の体積をV_2とおけば、

$$V = V_1 - V_2$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot \left(5 - \frac{9}{5}\right) = \frac{16^2}{15}\pi$$

$$V_2 = \int_3^5 \pi(y^2-9)dy$$

$$= \pi\left[\frac{y^3}{3} - 9y\right]_3^5 = \pi\left\{\frac{5^3-3^3}{3} - 9(5-3)\right\}$$

$$= \pi\left(\frac{98}{3} - 18\right) = \frac{44}{3}\pi$$

よって、

$$V = \frac{16^2}{15}\pi - \frac{44}{3}\pi = \frac{36}{15}\pi = \underline{\frac{12}{5}\pi}$$

④2 次曲線

○原則

(1) ◆逆関数と対称性

$y = f(x)$と$x = f(y)$のグラフは、直線$y = x$に関して対称となります。

◆直線と放物線が共有点を持つ条件

直線$ax + by + c = 0$と放物線$y = f(x)$が共有点を持つ。

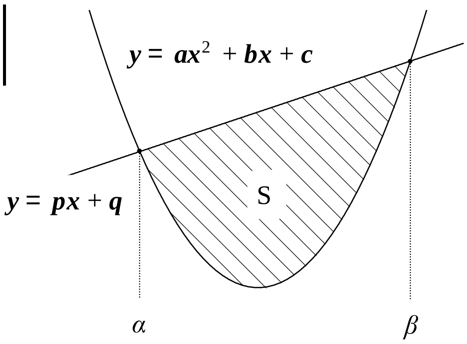
$\Leftrightarrow$

yを消去して得られるxについての 2 次方程式の判別式 $D \geqq 0$

(2) ◆直線と放物線で囲まれる面積

直線$y = px + q$と放物線$y = ax^2 + bx + c$で囲まれる図形の面積 Sは、直線と放物線の共有点のx座標を$\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$とすると、

$$\begin{aligned} S &= \left|\int_\alpha^\beta \{ax^2 + bx + c - (px + q)\}dx\right| \\ &= \left|\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx\right| \\ &= \frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$



公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

○解答・解説

(1)

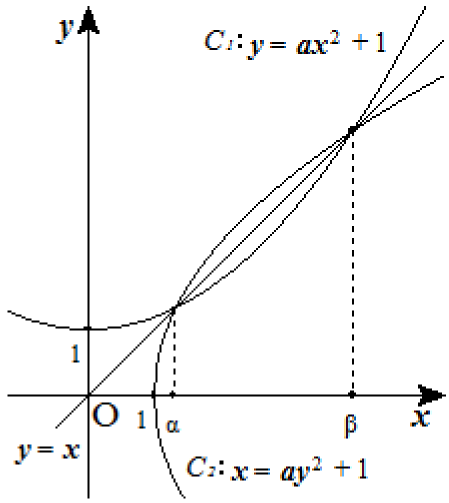
【方針】

2 曲線C_1, C_2が直線$y = x$に関して対称となることを利用します。つまり、C_1, C_2の共有点は必ず直線$y = x$上にあるので、C_1, C_2が 2 点で交わることは、C_1と直線$y = x$が 2 点で交わることになります。従って、放物線と直線の共有点の問題なので判別式を使っていきます。

【解説】

2 曲線C_1, C_2は、xとyを入れかえた関係にあるので、お互いに逆関数の関係になっています。従って、C_1, C_2のグラフは直線$y = x$に関して対称です。

このことから、2 曲線C_1, C_2が 2 点で交わるのは、曲線C_1と直線$y = x$が異なる 2 点で交わるときとなります。



C_1 : $y = ax^2 + 1$ と$y = x$から得られる 2 次方程式

$$ax^2 - x + 1 = 0$$

の判別式 Dは、共有点を持つことから、

$$D = 1 - 4a > 0$$

$$\therefore 0 < a < \frac{1}{4}$$

(2)

【方針】

この問題も対称性を使うと、計算が易しくなります。2 曲線C_1, C_2で囲まれた図形は、直線$y = x$で対称です。従って、直線$y = x$と放物線C_1で囲まれる図形の面積を 2 倍すればよいことになります。

直線と放物線で囲まれる図形の面積は、原則の公式を使って計算します。

【解説】

$0 < \dfrac{3}{16} < \dfrac{1}{4}$より、2 曲線$C_1, C_2$は異なる 2 点で交わります。

(1)と同様に、図形の対称性を使うと、求める面積は直線$y = x$と放物線C_1で囲まれた面積S'の 2 倍となります。

$$ax^2 - x + 1 = 0 \cdots ①$$

の異なる 2 つの実数解をα, βとおくと、

$$S' = \int_\alpha^\beta \{x - (ax^2 + 1)\} = -\int_\alpha^\beta (ax^2 - x + 1)dx = -a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$= -a\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\} = \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

ここで①の解は、

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2a}$$

なので、

$$\beta - \alpha = \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a} - \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}$$

$$= \frac{\sqrt{1-4a}}{a} = \frac{\sqrt{1 - 4 \cdot \frac{3}{16}}}{\frac{3}{16}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

よって、

$$S' = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{16}\left(\frac{8}{3}\right)^3$$

$$S = 2S' = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{16}\left(\frac{8}{3}\right)^3 = \underline{\frac{32}{27}}$$