昭和大学医学部入試問題

2013年Ⅰ期数学

解答・解説編

【解答】

1

(1)$(0,-2,4)$　（2）$(2-1)\dfrac{2t}{1+t^z}$　$(2-2)-\dfrac{1}{2},3$

(3)$(3-1)\dfrac{1}{n}$　$(3-2)\dfrac{m-1}{n(n-1)}$　$(3-3)\dfrac{1}{2}$　$(3-4)\dfrac{\mathrm{n}+1}{3}$

2

(1) $y=-x-\dfrac{1}{4}$　(2) $p<0, 1<p$　(3) $p<-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}<p<0, 1<p$

(4) $q_1q_2(q_1+q_2)=-\dfrac{1}{4}$

⑸ C_2 上の点 (s^2,s) における C_2 の接線の方程式は

$x-s^2=2s(y-s)$

$x=2sy-s^2$ …… ①

①が点 $\mathrm{P}(p,p^2)$ を通るとき、　$p=2sp^2-s^2$

これを s の２次方程式とみて、　$s^2-2p^2s+p=0$ …… ②

②の２解を $\alpha,\ \beta$ とすると，$p\neq 0$ より、　$\alpha\neq 0, \beta\neq 0$

また，解と係数の関係より、　$\alpha+\beta=2p^2, \alpha\beta=p$

次に．①より，$\mathrm{P}(p,p^2)$ を通る２本の接線の方程式は

$x=2\alpha y-\alpha^2, x=2\beta y-\beta^2$

ここで，それぞれ $y=x^2$ と連立させると，これら２本の接線と C_1 との交点が求められる。

その x 座標はそれぞれ、　$x=2\alpha x^2-\alpha^2, x=2\beta x^2-\beta^2$　を満たす。

すなわち

$2\alpha x^2-x-\alpha^2=0$ …… ③

$2\beta x^2-x-\beta^2=0$ …… ④

③の判別式を D_1 とする。

$D_1=1+8\alpha^3=(1+2\alpha)(1-2\alpha+4\alpha^2)$

ここで $1-2\alpha+4\alpha^2=4\left(\alpha-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$　なので、$D_1=0$　となるのは$\alpha=-\dfrac{1}{2}$ のときのみ。

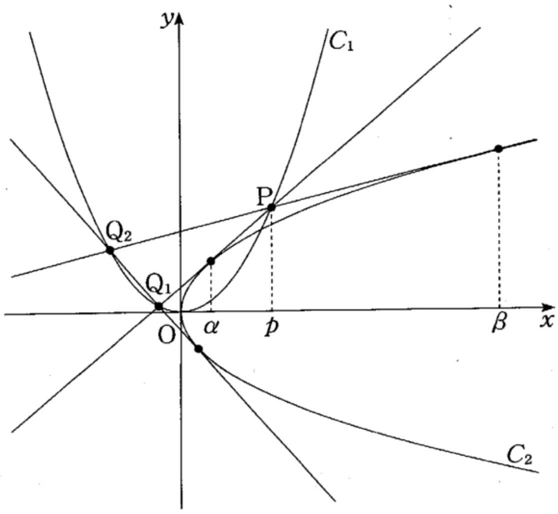
αは②の解なので、$\alpha=-\dfrac{1}{2}$　のとき、　$\dfrac{1}{4}+p^2+p=0$　$\therefore\ \left(p+\dfrac{1}{2}\right)^2=0$

しかし、$p\neq -\dfrac{1}{2}$　$(\because (3))$に矛盾するので、$\alpha\neq -\dfrac{1}{2}$

すなわち，$D_1\neq 0$ となる。

したがって，③は p 以外の解をもち，それを q_1 とする。

同様にして，④は p 以外の解をもち，それを q_2 とする。



このとき，③と④において，解と係数の関係より

$$p+q_1=\frac{1}{2\alpha}, pq_1=-\frac{\alpha}{2}$$

$$p+q_2=\frac{1}{2\beta}, pq_2=-\frac{\beta}{2}$$

これら 4 式より

$$q_1+q_2=\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}-2p=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}-2p$$

$$=\frac{2p^2}{2p}-2p=-p$$

$$q_1q_2=\left(-\frac{\alpha}{2p}\right)\left(-\frac{\beta}{2p}\right) \quad (\because\ p\neq 0)$$

$$=\frac{\alpha\beta}{4p^2}=\frac{p}{4p^2}=\frac{1}{4p}$$

また、$q_1-q_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}$であるが、$\beta\neq\alpha$より、$q_1 \neq q_2$となり、

Q_1とQ_2 は相異なる 2 点である。

したがって、 $q_1q_2(q_1+q_2)=\frac{1}{4p}.(-p)=-\frac{1}{4}$

となり，(4)の条件を満たす。 (証明終)

3 (1)(1 − 1) $(\pm 5,0)$ (1 − 2) $y=\frac{3}{4}x$ (1 − 3) $\left(\frac{64\sqrt{7}}{35},-\frac{27\sqrt{7}}{35}\right),\left(-\frac{64\sqrt{7}}{35},\frac{27\sqrt{7}}{35}\right)$

(2)$a=2, b=17$ (3) (3 − 1) $\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-13 & 5\\ -5 & 13\end{pmatrix}$ (3 − 2) $\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-13 & 5\\ -5 & 13\end{pmatrix}$

4

(1)$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{\sqrt{2e}}{4}$ (2) $S=e-2$

【解説】

①小問集合

○原則

(1) ◆直線のベクトル方程式

点 A($\vec{a}$)を通り、ベクトル $\vec{d}$に平行な直線

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}\ \ (t\text{: 実数})$$

2 点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$)を通る直線

$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})\ \ (t\text{: 実数})$$

◆2 つのベクトルの直交条件

$$\vec{a}\perp\vec{b}\ \left(\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}\right)\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

(2) ◆三角関数の相互関係

ｉ) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　ⅱ) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　ⅲ) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

◆2 倍角の公式

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

(3) ◆余事象を使った確率の計算

$$P(A)=1-P(\bar{A})$$

◆期待値の計算

ある試行によって得られる数値を $x_i\ (i=1,2,3,\cdots,n)$, そのときの確率を$P(x_i)$とします。この試行の期待値は、次の式となります。

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot P(x_i)$$

◆Σの計算

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n\,(n+1),\qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n\,(n+1)(2n+1),\qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

○解答・解説

(1)

【方針】

ベクトルの問題で「垂直」とあったら「内積が 0」を使います。この問題では、$\overrightarrow{\mathrm{PH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ なので、$\overrightarrow{\mathrm{PH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ を使います。3 点 A, B, P は与えられているので、点 H を設定します。そのとき点 H が直線 AB 上にあることを用いましょう。

【解説】

直線 PH と直線 AB が垂直、つまり $\overrightarrow{\mathrm{PH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ なので、

$\overrightarrow{\mathrm{PH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \cdots$①

次に、$\overrightarrow{\mathrm{PH}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分表示します。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-4,\ 0,\ 12) - (2, -3,\ 0) = (-6,\ 3,\ 12) = 3(-2,\ 1,\ 4) \cdots$②

ここで、点 H は直線 AB 上にあるので、tを実数として、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= (2, -3, 0) + t(-6, 3, 12)\\ &= (-6t+2, 3t-3, 12t) \cdots ③\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= (-6t+2, 3t-3, 12t) - (-4, -6, 3)\\ &= (-6t+6, 3t+3, 12t-3)\\ &= 3(-2t+2, t+1, 4t-1) \cdots ④\end{aligned}$$

②④を①に代入して、

$$\begin{aligned}3(-2t+2, t+1, 4t-1) \cdot 3(-2, 1, 4) &= 0\\ 9\{(-2t+2)(-2) + (t+1)\cdot 1 + (4t-1)\cdot 4\} &= 0\\ 21t - 7 &= 0\end{aligned}$$

$\therefore t = \frac{1}{3}$　③に代入して、$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (0, -2, 4)$　$\therefore$ 点 $\mathrm{H}(0, -2, 4)$

(2)

【方針】

(2-1)まず、角度を揃えることを考えます。角度が揃っていないと、三角関数の主な公式が利用できません。この問題では、$\sin\theta$を次のように変形します。

$$\sin\theta = \sin 2\cdot\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

これで角度が揃ったので、三角関数の相互関係を利用して、式変形します。

(2-2) (2-1)と同様に$\cos\theta$をtで表すことができたら、tについての方程式がたちます。

【解説】

(2-1) 三角関数の角度が揃っていないので、$\frac{\theta}{2}$ に揃える方向で式変形します。

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sin 2\cdot\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\ &= 2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\\ &= 2\tan\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\\ &= \underline{\frac{2t}{1+t^2}}\end{aligned}$$

(三角関数の相互関係より)

$$\boxed{\sin\alpha = \tan\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}}$$

(2-2) $\tan\frac{\theta}{2}$の値を求める、つまりtの値を求めるので、tについての方程式をたてることを目指します。(2-1)より$\sin\theta$はtで表せています。同様に$\cos\theta$もtで表すことができたら、条件よりtについての方程式がたちます。

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos 2\cdot\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\\ &= 2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} - 1\\ &= 2\cdot\frac{1}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

$\sin\theta + \cos\theta = -\frac{1}{5}$より、

$$\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=-\frac{1}{5}$$
$$10\mathrm{t}+5(1-\mathrm{t}^2)=-(1+t^2)$$
$$4\mathrm{t}^2-10t-6=0$$
$$2t^2-5t-3=0$$
$$(2t+1)(t-3)=0$$
$$t=-\frac{1}{2},3$$

$-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$より、$\underline{\tan\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{2},\ 3}$

(3)

【方針】

確率は、具体的に考えると解法が見えてきます。例えば、(3-1)(3-2)では、m=3 で実験してみましょう。(3-3)は余事象を考えます。(3-4)は期待値の定義に従って、計算します。

【解説】

(3-1) 1 回目は、番号m以外の$n-1$枚のカードから選び、2 回目に番号mのカードを選ぶので、その確率は、

$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\underline{\frac{1}{n}}$$

(3-2) 得点がm点になるには、1 回目はmより小さい番号のカードを選び、2 回目に番号mのカードを選べばよい。番号がmより小さいカードは全部で$m-1$枚あるので、求める確率は、

$$\frac{m-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\underline{\frac{m-1}{n(n-1)}}$$

(3-2) 得点が 0 点になるには、1 回目に引いたカードの番号が 2 回目のカードの番号より大きいときです。しかし、そのような場合を考えるのは、ちょっと大変です。そんな時は、余事象を考えてみましょう。

X を得点とします。X の取り得る範囲は$X=0,\ 2\leqq X\leqq n$ なので、

「$X=0$」の余事象は,「$2\leqq X\leqq n$」となります。よって、求める確率は、

$$P(X=0)=1-P(2\leqq X\leqq n)$$

ここで、$P(2 \leqq X \leqq n)$は、(3-2)の結果を利用して、

$$P(2 \leqq X \leqq n) = \sum_{m=2}^{n} \frac{m-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{m=2}^{n} (m-1)$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{2}(n-1)(1+n-1) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(X=0) = 1 - \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$$

> $\sum_{m=2}^{n}(m-1)$ は
> 初項 1, 末項(n − 1), 項数(n − 1)
> の等差数列の和です。

(3-4) 期待値は、次の式で表されます。

$$\sum_{m=2}^{n} mP(X=m) = \sum_{m=2}^{n} \frac{m(m-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{m=2}^{n} m(m-1)$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) \quad (\text{ただし、} k = m-1)$$

> $k = m - 1$と置き換える
> ことで、$\sum$は、$k = 1$から
> 始まります。

$$= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + k) = \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2} n(n-1) \right\}$$

$$= \frac{1}{6}(2n-1) + \frac{1}{2} = \underline{\frac{n+1}{3}}$$

---- (参考) --

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$は、次のようにも計算できます。

$$k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) = k(k+1)\{(k+2) - (k-1)\}$$
$$= k(k+1) \cdot 3$$

より、

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\}$$

$$=\frac{1}{3}\{(1\cdot 2\cdot 3-0)+(2\cdot 3\cdot 4-1\cdot 2\cdot 3)+\cdots$$
$$+n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)\}$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

この問題では、$n-1$までの和なので、

$$\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)=\frac{1}{n(n-1)}\cdot\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)=\underline{\frac{n+1}{3}}$$

②二次曲線

○原則

１．◆接線の方程式

関数$y=f(x)$上の点$(a,f(a))$ における接線の方程式は、

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

２．◆共通接線

関数 $y=f(x),\ y=g(x)$ が与えられたとき、共通接線が存在する条件は、それぞれの接点の座標を$\left(s,f(s)\right),\ (t,g(t))$ とした２つの接線

$$\begin{cases}y=f'(s)(x-s)+f(s)\\ y=g'(t)(x-t)+g(t)\end{cases}$$

が、一致するようなs,t が存在するということです。

３．◆放物線における接線の本数と接点の数は一致します。

４．◆直線と放物線の交点の数　直線$y=f(x)$ と放物線$y=g(x)$ が与えられたとき、
それらの交点の個数は、yを消去して得られるxについての２次方程式の解の個数と一致します。

○解答・解説

(1)

【方針】

共通接線を求めるので、C_1, C_2それぞれに接点を設定しC_1, C_2の接線の方程式を求めましょう。得られた 2 つの接線は一致するので、傾きと定数項が等しいことを利用して式をたてます。

【解説】

C_1上の点$(\mathrm{s}, \mathrm{s}^2)$における接線の方程式は、

$$y = 2s(x-s) + s^2 = 2sx - s^2 \cdots ①$$

C_2上の点(t^2, t)における接線の方程式は、

$$x = 2t(y-t) + t^2 = 2ty - t^2 \cdots ②$$

ここで、 $t = 0$のときの接線は$x = 0$ですが、この直線はC_1に接しないため $t \neq 0$ として、

$$y = \frac{1}{2t}x + \frac{t}{2} \cdots ②$$

①②が一致することから、直線の傾きと定数項が等しくなり、

$$\begin{cases} 2s = \dfrac{1}{2t} \\ -s^2 = \dfrac{t}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4st = 1 \cdots ③ \\ -2s^2 = t \cdots ④ \end{cases}$$

③④から、$8s^3 = -1$。従って、

$$s = -\frac{1}{2} \quad (t = -\frac{1}{2})$$

①に代入して、求める接線の方程式は

$$\underline{y = -x - \frac{1}{4}}$$

(2)

【方針】

C_2の接線が 2 本引けることから、C_2上の接点が 2 個必要です。まず、接点の座標を

(t^2, t)とおいて、接線の方程式を求めましょう。そして、その接線が点 P を通ることから、tについての 2 次方程式が得られます。接点が 2 個となる条件は、この 2 次方程式が相異なる 2 つの実数解をもつことです。

【解説】

(1)と同様に、C_2上の接点を(t^2, t) とおくと、接線の方程式は

$$x = 2ty - t^2$$

この接線が、点$\mathrm{P}(p, p^2)$を通ることから、

$$p = 2tp^2 - t^2 \Leftrightarrow t^2 - 2p^2t + p = 0 \cdots ⑤$$

ここで、tについての 2 次方程式⑤を解くということは、接点のx座標を求めることに他なりません。また、放物線において接線の本数と接点の数が一致することから

接線が 2 本 $\Leftrightarrow$ 接点が 2 個 $\Leftrightarrow \mathrm{D} > 0$ (Dは⑤の判別式)

従って、

$$\frac{\mathrm{D}}{4} = p^4 - p > 0$$

$$p(p-1)(p^2 + p + 1) > 0 \cdots ⑥$$

$p^2 + p + 1 = \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ なので、⑥の解は、$p < 0,\ p > 1$

$$\therefore p < 0, \quad p > 1$$

(3)

【方針】

(1)(2)を利用する。

【解説】

点 P を通るC_2の接線が 2 本あるので、(2)より$p < 0, p > 1$

この範囲の中から、2 本の接線がC_1と P 以外の点で交わらない場合を除きます。

つまり除外するのは、この接線がC_1にも接する場合です。これは、(1)より

$p = -\frac{1}{2}$ のときです。

$$\therefore\ p < -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < p < 0, \quad 1 < p$$

(4)

【方針】

直線Q_1Q_2と曲線C_2が接する条件は、直線Q_1Q_2と曲線C_2を表す方程式から連立して得られる２次方程式が、重解をもつことです。そこでまず、直線Q_1Q_2の方程式を求めましょう。

【解説】

まず、直線Q_1Q_2の方程式を求めます。２点Q_1，Q_2は異なるので、$q_1 \neq q_2$ 。
従って、直線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1 - q_2}(x - q_1) + q_1^2 \\ &= (q_1 + q_2)(x - q_1) + q_1^2 \\ &= (q_1 + q_2)x - q_1 q_2 \cdots ⑦ \end{aligned}$$

次に⑦と、曲線$C_2 : y^2 = x \cdots$⑧ が接する条件を考えます。
⑦⑧から、xを消去して、

$$(q_1 + q_2)y^2 - y - q_1 q_2 = 0$$

この２次方程式の判別式D'が０のとき、⑦と⑧が接するので、

$$q_1 + q_2 \neq 0 \text{ かつ } \quad D' = 1 + 4(q_1 + q_2)q_1 q_2 = 0$$

$q_1 + q_2 \neq 0$ は、$1 + 4(q_1 + q_2)q_1 q_2 = 0$ に含まれるので、

$$\therefore \ \underline{q_1 q_2 (q_1 + q_2) = -\frac{1}{4}}$$

(5)

【方針】

(4)が利用できます。それには、２点Q_1, Q_2のx座標が必要となるので、Q_1, Q_2の座標について調べます。その為に、C_2の接線の方程式が必要となるので、C_2上の接点を設定し接線の方程式を求めます。その接線と$C_1: y = x^2$を連立して、Q_1, Q_2の座標を調べます。 (4)を利用するとき、Q_1, Q_2のx座標どうしの和と積の値さえ計算できればいいので、実際にx座標の値を計算する必要はなく、解と係数の関係を使って計算するといいでしょう。

【解説】

(4)の結果を利用する為に、２点Q_1，Q_2 の座標について調べましょう。
まず、C_2の２つの接線の方程式を求めます。

C_2上の点$(t^2,\ t)$ における接線の方程式は、

$$x = 2ty - t^2 \cdots (イ)$$

(イ)が、点$(p,\ p^2)$ を通るので、

$$p = 2tp^2 - t^2$$
$$t^2 - 2p^2 t + p = 0 \cdots (ロ)$$

(ロ)を解くと接点の座標が求まり、さらにC_2の接線の方程式も分かります。ここでは、計算を複雑にしないために、(ロ)の 2 つの解をα, βとおきます。

点Pを通るC_2の接線は(イ)より、

$$x = 2\alpha y - \alpha^2 \cdots (ハ), \qquad x = 2\beta y - \beta^2 \cdots (ニ)$$

の 2 本です。また、解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = 2p^2 \cdots (ホ), \qquad \alpha\beta = p \cdots (ヘ)$$

条件より、(3)の結果から$p \neq 0$ であり、$\alpha\beta \neq 0$。従って、$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$です。

次に、接線(ハ)と、$C_1: y = x^2 \cdots (ト)$との交点を調べます。題意より、交点の一つは、点$P(p, p^2)$であり、もう一つは点$Q_1(q_1,\ q_1^2)$とおけます。

(ハ)(ト)より、y を消去して、$2\alpha x^2 - x - \alpha^2 = 0$

解と係数の関係から、

$$p + q_1 = \frac{1}{2\alpha},\quad pq_1 = -\frac{\alpha}{2}$$

同様にして、接線(ニ)と、C_1との交点を調べます。題意より、交点の一つは、点$P(p, p^2)$であり 、もう一つは点$Q_2(q_2,\ q_2^2)$となります。

(ニ)(ト)より、y を消去して、$2\beta x^2 - x - \beta^2 = 0$

解と係数の関係から、

$$p + q_2 = \frac{1}{2\beta},\quad pq_2 = -\frac{\beta}{2}$$

これで、準備ができました。後は、$q_1 + q_2,\ q_1 q_2$ を計算して(4)の利用を目指します。

$$q_1 + q_2 = \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\beta} - 2p = \frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta} - 2p$$
$$= \frac{2p^2}{2p} - 2p \ \ (\because (ホ)(ヘ))$$
$$= -p$$

$$q_1 q_2 = \left(-\frac{\alpha}{2p}\right)\left(-\frac{\beta}{2p}\right) = \frac{\alpha\beta}{4p^2}$$
$$= \frac{p}{4p^2} \ \ (\because (ホ)(ヘ))$$
$$= \frac{1}{4p}$$

よって、

$$q_1 q_2 (q_1 + q_2) = \frac{1}{4p} \cdot (-p) = -\frac{1}{4}$$

従って、(4)から直線Q_1Q_2は、C_2と接します。

③小問集合

○原則

(1) ◆双曲線の焦点と漸近線

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ に対して、焦点は$(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ 漸近線は $y = \pm\frac{b}{a}x$ です。

◆双曲線の接線の方程式

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点(s, t)における接線の方程式は、$\frac{s}{a^2}x - \frac{t}{b^2}y = 1$です。

◆2 直線の直交条件

2 直線$a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ が直交する

$$\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

(2) ◆整数問題では、不等式を利用して解を絞ることがあります。この問題では、条件が不等式なので、この方針で考えます。

◆対数の底の条件と真数条件

$\log_a b$において、底の条件は、$0 < a,\ a \neq 1$、 真数条件は、$0 < b$ となります。

◆対数の底の変換

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (0 < a, a \neq 1, 0 < b, 0 < c, c \neq 1)$$

(3)　◆一次変換

1 次変換fによって、点(x, y)が点(x', y')に移るとします。一次変換fを表す行列をAとおくと、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

◆ケーリーハミルトンの定理

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき、$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$

これより、A^2は、Aの一次式で表すことができます。さらに繰り返し使うことで、A^n (n: 自然数) もAの一次式で表すことができます。

○解答・解説

(1)

【方針】

原則を利用して求めます。

【解説】

(1-1) 双曲線 H の焦点の座標は、$\left(\pm\sqrt{16+9}, 0\right) = \underline{(\pm 5, 0)}$

(1-2) 双曲線 H の漸近線は、$y = \pm\frac{3}{4}x$ 。傾きが正なので、$\underline{y = \frac{3}{4}x}$

(1-3) 接点の座標を(s, t)とおくと、接線の方程式は、

$$\frac{s}{16}x - \frac{t}{9}y = 0$$

これと$3x - 4y = 0$が直交するので、2 直線の直交条件から

$$\frac{s}{16} \times 3 + \left(-\frac{t}{9}\right) \times (-4) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{16}s + \frac{4}{9}t = 0 \cdots ①$$

また、(s, t)は双曲線 H 上の点なので、

$$\frac{s^2}{16} - \frac{t^2}{9} = 1 \cdots ②$$

①②より、sを消去して、

$$\left(-\frac{16}{3}\cdot\frac{4}{9}t\right)^2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{9}t^2=1$$

$$\frac{4^4}{3^6}t^2-\frac{1}{3^2}t^2=1$$

$$\left(\frac{16^2-9^2}{3^6}\right)t^2=1$$

$$\frac{(16+9)(16-9)}{27^2}t^2=1$$

$$t^2=\frac{27^2}{25\cdot 7}\quad\therefore t=\pm\frac{27}{5\sqrt{7}}=\pm\frac{27\sqrt{7}}{35}$$

べき乗を計算してしまうと、大変です。後で平方根をとるので、べき乗を残すのが計算のコツです。

また、

$$s=-\frac{16}{3}\cdot\frac{4}{9}t=-\frac{16}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\pm\frac{27\sqrt{7}}{35}\right)=\mp\frac{64\sqrt{7}}{35}$$

よって、接点の座標は、

$$\underline{\left(\frac{64\sqrt{7}}{35},-\frac{27\sqrt{7}}{35}\right),\ \left(-\frac{64\sqrt{7}}{35},\frac{27\sqrt{7}}{35}\right),}$$

(2)

【方針】

a,bを不等式でおさえることを考えます。与えられた対数不等式は、底が揃っていません。底の変換公式で揃えてから、式変形をしていきます。底と真数の条件を忘れずに。

【解説】

まず、底の条件と真数条件を確認します。

$$\log_a b>\log_b a^4+3\ \cdots③$$

より、底と真数の条件から $0<a,a\neq 1,0<b,b\neq 1$

このことと、a,bが整数であることから、$a\geqq 2,b\geqq 2\cdots④$

次に、③の不等式では対数の底が揃っていませんので、底をaで揃えて、

$$\log_a b>\frac{\log_a a^4}{\log_a b}+3=\frac{4}{\log_a b}+3\cdots⑤$$

ここで、$t=\log_a b$とおきます。④より$t>0$で、⑤は次のようになります。

$$t > \frac{4}{t} + 3$$
$$t^2 > 4 + 3t \ (\because t > 0)$$
$$t^2 - 3t - 4 > 0$$
$$(t-4)(t+1) > 0$$
$$t < -1, t > 4$$

$t > 0$ より、$t > 4$ 。従って、t を元に戻して
$$\log_a b > 4 = \log_a a^4$$
$$b > a^4 \ (\because ④)$$

これで、a, b に関する不等式が導かれました。条件、$9a > b$と合わせて、
$$9a > b > a^4 \cdots ⑤$$
$$9a > a^4$$
$$9 > a^3 \ (\because ④)$$

この不等式を満たす 2 以上の整数は、$a = 2$ だけです。
このとき、⑤より　$18 > b > 16$ 。これを満たす整数は、$b = 17$となります。

$$\therefore \ \underline{a = 2, b = 17}$$

(3)
【方針】
(3-1)は、A を設定して原則に従い、条件から式をたてていきます。出てきた式を連立して A を求めます。(3-2)は次数が大きいので、ケーリーハミルトンの公式を利用して次数を下げます。最初にA^2がどうなるのか、計算してみましょう。

【解説】
(3-1)　$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a, b, c, d$ は実数$)$ とおき、条件を使ってa, b, c, dについての連立方程式を立てていきます。

まず一次変換f によって、直線l が直線m に移ることを使いましょう。
sを実数として、直線l上の点$(s, s+2)$が一次変換fによって移る点は、
$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} s \\ s+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ s+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as + b(s+2) \\ cs + d(s+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as + bs + 2b \\ cs + ds + 2d \end{pmatrix}$$

となります。この点が直線m上にあるので、
$$(as + bs + 2b) + (cs + ds + 2d) - 3 = 0$$

$$(a+b+c+d)s+2b+2d-3=0$$

この式が、すべての実数sについて成り立つには、

$$a+b+c+d=0 \cdots ④$$
$$2b+2d-3=0 \cdots ⑤$$

同様に、一次変換f によって、直線m が直線l に移ることを使います。
tを実数として、直線m上の点$(t,-t+3)$が一次変換fによって移る点は、

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} t \\ -t+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -t+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b(-t+3) \\ ct+d(-t+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at-bt+3b \\ ct-dt+3d \end{pmatrix}$$

となります。この点が直線l上にあるので、

$$(at-bt+3b)-(ct-dt+3d)+2=0$$
$$(a-b-c+d)t+3b-3d+2=0$$

この式が、すべての実数tについて成り立つには、

$$a-b-c+d=0 \cdots ⑥$$
$$3b-3d+2=0 \cdots ⑦$$

⑤⑦より、$b=\frac{5}{12},\ d=\frac{13}{12}$

これらと④⑥より、$a=-\frac{13}{12},\ c=-\frac{5}{12}$

従って、$\underline{A=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -13 & 5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}}$

(3-2)　A^{2013}は次数が大きいので、次数を下げることを考えます。それには、
ケーリー・ハミルトンの定理を使います。定理から、

$$A^2-\left(-\frac{13}{12}+\frac{13}{12}\right)A+\left\{\left(-\frac{13}{12}\right)\cdot\frac{13}{12}-\frac{5}{12}\left(-\frac{5}{12}\right)\right\}E=O$$

$$A^2-\frac{18\cdot 8}{12^2}E=O$$

$$A^2=E$$

この結果を使って、A^{2013}の次数を下げます。つまり、

$$A^{2013}=(A^2)^{1006}\cdot A=E^{1006}\cdot A=A=\underline{\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -13 & 5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}}$$

④微分積分

○原則

１．◆関数$y=f(x)$の増減

Ⅰ）ある区間で常に、$f'(x)>0 \Longrightarrow$ その区間で$f(x)$は単調増加。

Ⅱ）ある区間で常に、$f'(x)<0 \Longrightarrow$ その区間で$f(x)$は単調減少。

Ⅲ）ある区間で常に、$f'(x)=0 \Longrightarrow$ その区間で$f(x)$は定数。

２．◆関数$y=f(x)$の極大・極小

極大：$x=a$で、$f'(x)$の値が正から負に変化するとき、$x=a$で極大、
$f(a)$を極大値といいます。

極小：$x=a$で、$f'(x)$の値が負から正に変化するとき、$x=a$で極小、
$f(a)$を極小値といいます。

３．◆置換積分

方法Ⅰ）$x=g(t)$ とおく。

$$\int f(x)dx=\int f(x)\frac{dx}{dt}dt=\int f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

方法Ⅱ）$g(x)=t$ とおく。

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx=\int f(t)\frac{dt}{dx}dx=\int f(t)dt$$

○解答・解説

(1)

【方針】

原則により極小値を求めるには、$f'(x)$の正負を知る必要があります。$f'(x)$を求め増減表を作りましょう。増減表から極小を読み取ります。

【解説】

$f(x)=x(1-x^2)e^{x^2}$とおきます。微分して増減表を作りましょう。

積の微分法を使います。

$$f(x)=(x-x^3)e^{x^2}$$
$$f'(x)=(1-3x^2)e^{x^2}+(x-x^3)\cdot 2x\cdot e^{x^2}$$

$$= (1 - x^2 - 2x^4)e^{x^2}$$
$$= -(2x^4 + x^2 - 1)e^{x^2}$$
$$= -(2x^2 - 1)(x^2 + 1)e^{x^2}$$

$f'(x) = 0$となるのは、$x^2 + 1 > 0$より、

$$2x^2 - 1 = 0$$
$$\therefore x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

この結果から、増減表は右のようになります。

極小は、$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときで、極小値は

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{2}} = \underline{-\frac{\sqrt{2e}}{4}}$$

(2)

【方針】

面積を計算するには定積分ですが、今回は置換積分の方法Ⅱを使います。また、与えられた関数が奇関数であることに注意すると、余計な計算をしなくてすみます。

【解説】

まず、$y = f(x)$のグラフを書いて、どのような図形の面積を計算するのか明らかにしましょう。(1)の増減表から、グラフを次のようになります。

x軸との交点の座標は、$f(x) = 0$ より、

$$x(1 - x^2) = 0 \quad \therefore x = 0, \pm 1$$

また、$f(-x) = -f(x)$ となるので$f(x)$は奇関数です。奇関数は原点対称となるので、求める面積Sは、

$$S = 2\int_0^1 x(1 - x^2)e^{x^2}dx$$

この積分は、置換積分を利用しましょう。

$t = e^{x^2}$とおくと、

$$x^2 = \log t, \qquad \frac{dt}{dx} = 2xe^{x^2} = 2xt$$

x	$0 \to 1$
t	$1 \to e$

よって、

$$S = 2\int_1^e x(1-\log t)\,t \cdot \frac{dt}{2xt} = \int_1^e (1-\log t)dt$$

ここで、

$$\int \log t\,dt = t\log t - \int t \cdot \frac{1}{t}dt = t\log t - t$$

部分積分を使います。

より、

$$S = [t-(t\log t - t)]_1^e = (e-e+e)-(1-0+1) = e-2$$

$$\therefore S = e-2$$