

Q. (数3 標準問題精講 p229 演習 99-3(1))

$(z^3-1)/(z^2-z)$ が実数だとどうして平行になるのですか？ $\beta-\gamma/\alpha-\gamma$ が実数なら3点が一直線上にあるのと同じことですか？

A. 複素数平面は複素数の実部と虚部を直交座標の x 座標と y 座標とみなすことでベクトルに置き換えて考えることができます。そこで複素数平面をベクトルに置き換えて、疑問を解決しましょう。

複素数 $Z = x + yi$ の複素数平面上での位置ベクトルを $\vec{Z} = (x, y)$ と表すことにします。1と z^3 を結ぶ辺のベクトルは $\overrightarrow{z^3-1}$ 、同様に z と z^2 を結ぶ辺のベクトルは $\overrightarrow{z^2-z}$ と表せます。

$$\frac{\overrightarrow{z^3-1}}{\overrightarrow{z^2-z}} = k \quad (k: \text{実数}) \text{ となるとき、変形して}$$

$\overrightarrow{z^3-1} = k\overrightarrow{z^2-z}$ とすればベクトルと同様に、2つのベクトルが平行であると言えます。

これを応用すれば、複素数 α, β, γ が

$$\frac{\overrightarrow{\beta-\gamma}}{\overrightarrow{\alpha-\gamma}} = k \quad (k: \text{実数}) \text{ となるとき、}$$

$\overrightarrow{\beta-\gamma}$ と $\overrightarrow{\alpha-\gamma}$ が平行でかつ共通の点 γ を持つので α, β, γ が同一直線上にあることが分かります。