

Q.(数3 標準問題精講 P273 演習 116)

①を同値変形していくときに、 $x > 0$ 、 $y > 0$ は必要ないのですか？

A.2つの例を挙げて説明します。

(i) $x = 2$ という式があったとします。両辺を2乗すると $x^2 = 4$ となります。もしこれを解くと $x = \pm 2$ となって初めと違う解が出ました。これは2乗したことによって同値が崩れたということになります。2乗するときには $x \geq 0$ という条件をつけることで同値が保たれます。

(ii)今度は $\sqrt{x} = 2$ という式を考えてみましょう。これを2乗すると $x = 4$ です。この両辺の平方根をとると

$$\sqrt{x} = \sqrt{4} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \quad (\because \sqrt{x} \geq 0)$$

となって初めと同じ解が出ました。これは2乗しても同値が崩れていないということです。

なぜこのような違いが現れるかという、(i)では x が0以上であるという保証が無いからです(右辺も見れば正だと分かりますが、 x そのものには0以上かどうかという条件がありません)。

一方で(ii)では x に $\sqrt{\quad}$ がかかっているため、実数の範囲内では $x \geq 0$ という保証がなされています。また右辺は明らかに正です。このように方程式の両辺が0以上である保証があれば、2乗しても同値が保たれます。

この問題に当てはめて考えましょう。

初めの方程式 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ について、左辺は $\sqrt{x} \geq 0$ 、 $\sqrt{y} \geq 0$ なので0以上です。また右辺も明らかに0以上です。よって(ii)のパターンと同じなので、両辺を2乗しても同値が保たれるので、

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} = 4 - (x + y)$$

となります。

次に $2\sqrt{xy} = 4 - (x + y)$ について、左辺は $\sqrt{xy} \geq 0$ なので0以上です。しかし、右辺 $4 - (x + y)$ は、 x, y の値によっては負となりうる可能性があります。これは(i)のパターンなので、このまま両辺を2乗すると同値が崩れてしまいます。そこで(i)で説明したように、同値を保つためには(右辺) $= 4 - (x + y) \geq 0$ という条件を付けてあげればよいです。だから解答では②式を2乗するとき、 $x + y \leq 4$ という条件を付けているのです。

以上のことから①式を2乗しても同値は崩れませんが、②式を、同値を保ちながら2乗するときには条件 $x + y \leq 4$ が必要です。

なお \sqrt{x} のとき、 $x > 0$ ではなく $x \geq 0$ なので間違えないように気を付けましょう。