日大 2015 物理

略解

1　問 1．1－④　問 2．2－⑦　問 3．3－6　4－4

2　I.問 1.5－②　問 2．6－②　7－2

II.問 3．8－4　9－5　10－1　11－5　問 4.12･13－16　14－5

3　問 1.15･16－10　17－3　問 2.18−7　19−3　20･21－23　22･23－10

問 3.　24･25−28　26･27−15　28･29−47　30･31−30

4　問 1.32･33･34−105　35−2　36−7　37−2

問 2.38･39−45　40−8　41･42−43　43−8

5　44−1　45−2　46−3　47−2　48−3　49－8　50−1　51−2　52−3　53･54−32

1

原則１．光子の運動量とエネルギー　　　　→　問１に利用

波長 λ [m]（振動数 ν [Hz] ）の光子がもつ運動量 p [kg・m/s] は、次式で表される。なお、h はプランク定数：$h = 6.63 \times 10^{-34}$ [J・s] で、c は光速：$c = 3.00 \times 10^{8}$ [m/s] である。

$$p = \frac{hc}{\nu} = \frac{h}{\lambda}$$

また、波長 λ [m]（振動数 ν [Hz] ）の光子がもつエネルギー E [J]は、次式で表される。

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

上式より、電圧 V [V] により加速された電子の運動エネルギーの全てが波長 λ [m] の光子のエネルギーに変換されるとき、次式が成り立つことがわかる。なお、e は電子の電荷の大きさ：$e = 1.60 \times 10^{-19}$ [C] である。

$$eV = \frac{hc}{\lambda}$$

原則２．原子核の崩壊　　　　→　問３に利用

一般に、元素記号 X の原子核を ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ と表す。ここで、左上の添え字 A は質量数（＝陽子数＋中性子数）を、右上の添え字 Z は原子番号（＝陽子数）をそれぞれ意味する。

自然界において原子核 ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ が崩壊する場合、次の 3 種類のいずれかになる。

・α崩壊：${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + \alpha$（質量数が－4、原子番号が－2 となり、$\alpha$ 粒子（${}^{4}_{2}\mathrm{He}$）を放出）

・β崩壊：${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}_{Z+1}^{A}\mathrm{Y} + \beta$（原子番号が＋1 となり、$\beta$ 線（電子）を放出）

・γ崩壊：${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + \gamma$　（γ 線（光子）を放出）

問１

【方針】

「電子の加速電圧を 30.0 kV にしたときに得られる X 線の最短波長」と言う文言より、電子の運動エネルギーの全てが X 線（光子）のエネルギーに変換されたときの X 線の波長であることに気づく。この点に着目して、「原則１．光子の運動量とエネルギー」の知識などを利用して解く。

【解答】

1：④

【解説】

X 線が最短波長 λ [m] になるとき、電圧 V [V] により加速された電子の運動エネルギーの全てが X 線のエネルギーに変換されるので、次式が成り立つ。なお、e は電子の電荷の大

きさ：$e = 1.60 \times 10^{-19}$ [C] 、h はプランク定数：$h = 6.63 \times 10^{-34}$ [J・s] 、c は光速：$c = 3.00 \times 10^{8}$ [m/s] である。

$$eV = \frac{hc}{\lambda} \quad \cdots\cdots ①$$

よって、式①に、e、h、c の各定数の値と $V = 30.0 \times 10^{3}$ [V] を代入すると、

$$\lambda = \frac{hc}{eV} = \frac{6.63\times10^{-34}\times3.00\times10^{8}}{1.60\times10^{-19}\times30.0\times10^{3}} = 4.14 \times 10^{-11} \fallingdotseq 4.1 \times 10^{-11} \text{ [m]}$$

となる。

問２

【方針】

「イオン化（電離）エネルギーは 13.6 eV である」と言う文言より、基底状態のエネルギーが求められることに気づく。この点を踏まえて、水素原子のエネルギー準位に関する知識にもとづいて解く。

【解答】

2：⑦

【解説】

量子数 n の励起状態におけるエネルギー E_n は、基底状態（$n = 1$）におけるエネルギー E_1 を使うと、次式のように表せる。

$$E_n = E_1 \cdot \frac{1}{n^2} \quad \cdots\cdots ①$$

安定な水素原子の場合、電子は基底状態にあって、それが無限遠点（$E = 0$）まで離れた場合がイオン化に相当する。よって、イオン化エネルギーは $0 - E_1 = -E_1$ と表せる。したがって、

$$-E_1 = 13.6 \text{ [eV]} \qquad \therefore E_1 = -13.6 \text{ [eV]}$$

となる。水素原子が量子数：$n = 2$ の励起状態（エネルギー：E_2）より、基底状態（エネルギー：E_1）へ遷移するとき、余分のエネルギーは光子として放出される。よって、求めるエネルギー E は、式①を使って

$$E = E_2 - E_1 = -13.6 \times \frac{1}{2^2} - (-13.6) = 10.2 \text{ [eV]}$$

となる。

問３

【方針】

質量数や原子番号の変化から α 崩壊と β 崩壊の回数を求める問題であると気づく。したがって、「原則２．原子核の崩壊」の知識を利用して解く。

【解答】

3：6　　4：4

【解説】

α崩壊の回数を x 回とおくと、質量数の変化より

$$232 - 4x = 208 \quad \therefore x = 6$$

となる。また、β崩壊の回数を y 回とおくと、原子番号の変化と $x = 6$ より

$$90 - 2x + y = 90 - 2 \times 6 + y = 82 \quad \therefore y = 4$$

となる。

２

原則３．単振動の運動方程式と周期など　　　　→　問２・問４に利用

物体の質量を m 、変位を x 、加速度を a とおいたとき、運動方程式が

$$ma = -kx \quad （k \text{ は正の定数}）$$

で表されるなら、この物体は単振動をする。なお、単振動の周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

となる。また、振幅を A とおくと、変位 x は次式で表される。

$$x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \quad （\varphi \text{ は初期位相}）$$

となる。

原則４．重心の公式　　　　→　問３に利用

x 軸上の座標 x_1 と x_2 の位置に、質量 m_1 と m_2 の物体がそれぞれ存在しているとき、この２つの物体の重心の座標 x_G は、次式で表される。

$$x_\mathrm{G} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

問１・問２

【方針】

静止状態では、ばね１は自然長 l_0 より伸び、ばね２は自然長 l_0 より縮んでいることに気づく。この点を最初の手掛かりとして、「原則３．単振動の運動方程式と周期など」の知識などを利用して順に解いてゆく。

【解答】

（問１）５：②

（問２）６：②　　７：２

【解説】

（問１）

ばね１は伸びていて、伸びの量は $(l_1 - l_0)$ 、ばね２は縮んでいて、縮みの量は $(l_0 - l_2)$ である。よって、鉛直下向きを正として、力のつり合いの式を立てると

$$mg - k(l_1 - l_0) - k(l_0 - l_2) = 0$$

となり、整理すると

$$k(l_1 - l_2) = mg \quad \cdots\cdots①$$

となる。

（問２）

図２では､ばね１の伸びの量は (l_1+x-l_0) ､ばね２の縮みの量は (l_0-l_2+x) と表せる。よって、おもりの運動方程式（鉛直下向きを正）は、式①も用いると次式のようになる。

$$ma = mg - k(l_1+x-l_0) - k(l_0-l_2+x) = \{mg - k(l_1-l_2)\} - 2kx = -2kx \quad \cdots\cdots②$$

上式の $ma=-2kx$（ k は正の定数）と言う形より､おもりは単振動をすることがわかる。よって、この単振動の周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = \pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

となる。

問３・問４

【方針】

「この系の重心を原点とし」と言う文言より、重心の公式を用いて M_1、M_2 の各座標が求められることに気づく。この点を踏まえて、「原則４．重心の公式」や「原則３．単振動の運動方程式と周期など」の知識を利用して順に解いてゆく。

【解答】

（問３）８：４　　９：５　　10：１　　11：５

（問４）12・13：16　　14：５

【解説】

（問３）

おもり M_1、M_2 の各座標を x_1、x_2 とおくと、重心の公式より

$$0 = \frac{mx_1+4mx_2}{m+4m} \qquad \therefore x_1 + 4x_2 = 0 \quad \cdots\cdots①$$

となる。また、ばねの長さが l_0 であるから

$$x_2 - x_1 = l_0 \quad \cdots\cdots②$$

となって、これと式①からの $x_2 = -\frac{1}{4}x_1$ より

$$-\frac{1}{4}x_1 - x_1 = l_0 \qquad \therefore x_1 = -\frac{4}{5}l_0$$

となる。よって、

$$x_2 = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}l_0\right) = \frac{1}{5}l_0$$

となる。

（問４）

重心の位置が原点にある（すなわち原点で静止している）ことから、単振動における各時刻での M_1、M_2 の位置を $x_1{}'$、$x_2{}'$ とおくと、$x_1{}'$、$x_2{}'$ は式①を満たす。ここで、単振動中のばねの伸びを x とおくと

$$x_2{}' - x_1{}' = l_0 + x \quad \cdots\cdots③$$

となる。式①と③より､$x_2{}' = \frac{1}{5}(l_0+x)$ となるから､おもり M_2 の静止状態からの変位 x_2 は

$$x_2 = x_2' - \frac{1}{5}l_0 = \frac{1}{5}x \qquad \therefore x = 5x_2 \ \cdots\cdots④$$

となる。このときのおもり M_2 の加速度を a_2 とおき、M_2 の運動方程式を立てると、式④より

$$4ma_2 = -kx = -k \cdot 5x_2 = -5k \cdot x_2$$

となる。この $4ma_2 = -5k \cdot x_2$（ k は正の定数）と言う形より、おもり M_2 の単振動の周期 T' は

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{5k}} = \pi\sqrt{\frac{16m}{5k}}$$

となる。

３

原則５．気体の状態方程式と各法則　　　　→　問１～問３に利用

一般に、体積 V [m^3] 、圧力 P [Pa] 、温度 T [K] 、物質量 n [mol] の気体においては、次式で表される気体の状態方程式が成り立つ。

$$PV = nRT \quad \cdots\cdots ①$$

なお、R は気体定数と呼ばれるもので、$R \fallingdotseq 8.31$ [J/(mol・K)] である。

また、気体の状態方程式より、標準状態（0 ℃ 、1.01×10^5 Pa）での気体 1 mol の占める体積は、気体の種類によらず 22.4 L となる。

ところで、物質量が一定であれば、気体の状態方程式（①式）より、次式で表されるボイル・シャルルの法則が導かれる。

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \quad \cdots\cdots ②$$

また、温度一定の条件下では、②式より、次式で表されるボイルの法則が導かれる。

$$P_1V_1 = P_2V_2 \quad \cdots\cdots ③$$

同様に、圧力一定の条件下では、②式より、次式で表されるシャルルの法則が導かれる。

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \cdots\cdots ④$$

原則６．熱力学第１法則とモル比熱　　　　→　問２・問３に利用

気体に与えた熱量 Q は、気体の内部エネルギーの増加量 ΔU と、気体が外部にした仕事 W の和に等しい。すなわち、次式が成り立つ。

$$Q = \Delta U + W \quad \cdots\cdots ①$$

なお、単原子分子気体の内部エネルギー U は次式で表される。ここで、n は物質量、R は気体定数、T は温度である。

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

また、気体が外部にした仕事 W は次式で表される。ここで、p は圧力、ΔV は体積の増加量である。

$$W = p\Delta V$$

ところで、単原子分子気体の定圧変化では、$W = nR\Delta T$ となるので、式①は次式のように変形できる。なお、$C_\mathrm{P} = \frac{5}{2}R$ を定圧モル比熱と言う。

$$Q = \Delta U + nR\Delta T = \frac{3}{2}nR\Delta T + nR\Delta T = \frac{5}{2}nR\Delta T = nC_\mathrm{P}\Delta T$$

また、単原子分子気体の定積変化では、$W = 0$ となるので、式①は次式のように変形できる。なお、$C_\mathrm{V} = \frac{3}{2}R$ を定積モル比熱と言う。

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T = nC_\mathrm{V}\Delta T$$

問１

【方針】

「部屋 B のコックを開け」と言う文言より、状態Ⅱにおいてピストンに働く左向きの力は大気圧による力とばねによる力の合力であることに気づく。この点を踏まえて、「原則５．気体の状態方程式と各法則」の知識を利用して解く。

【解答】

15・16：10　　17：3

【解説】

まず、状態Ｉの A 内における気体の状態方程式は

$$p_0Sl = 1 \cdot RT_\mathrm{A} \quad \cdots\cdots ①$$

となる。また、状態Ⅱの A 内の気体の状態方程式は、気体の圧力を p_2 とおくと

$$p_2S\left(l + \frac{1}{5}l\right) = 1 \cdot R \cdot 2T_\mathrm{A}$$

となる。ピストンには、内気圧による力（ p_2S ）が右向きに、外気圧による力（ p_0S ）とばねの力（ $k \cdot \frac{1}{5}l$ ）が左向きにそれぞれ働いてつり合うので、次式が成り立つ。

$$p_2S = p_0S + \frac{1}{5}kl \quad \cdots\cdots ②$$

また、ボイル・シャルルの法則より、次式が成り立つ。

$$\frac{p_2S \cdot \frac{6}{5}l}{p_0Sl} = \frac{2T_\mathrm{A}}{T_\mathrm{A}} \quad \therefore p_2 = \frac{5}{3}p_0$$

これを式②に代入すると

$$\frac{5}{3}p_0S = p_0S + \frac{1}{5}kl \quad \therefore k = \frac{10}{3} \cdot \frac{p_0S}{l} \quad \cdots\cdots ③$$

となる。

問２

【方針】

「熱量 Q_1 を与えた」と言う文言より、熱力学第１法則が適用されることに気づく。この点を踏まえて、「原則５．気体の状態方程式と各法則」や「原則６．熱力学第１法則とモル比熱」の知識を利用して順に解いてゆく。

【解答】

18：7　　19：3　　20・21：23　　22・23：10

【解説】

ばねの縮みが $\frac{2}{5}l$ である点に注意して、状態Ⅱの場合と同様、ピストンにおける力のつり合いの式を立てると

$$P_\mathrm{A}S = p_0S + \frac{2}{5}kl$$

となる。これに式③を代入すると

$$P_{\mathrm{A}}S = p_0 S + \frac{2l}{5} \times \frac{10}{3} \cdot \frac{p_0 S}{l} = \frac{7}{3} p_0 S \quad \therefore P_{\mathrm{A}} = \frac{7}{3} p_0 \ \cdots\cdots ④$$

となる。

つぎに、状態ⅢのA内の気体の状態方程式は、気体の温度を T_1 とおくと

$$P_{\mathrm{A}}S \cdot \left(\frac{7}{5} l\right) = 1 \cdot RT_1$$

となる。これに式④を代入すると

$$\frac{7}{3} p_0 \cdot S \cdot \left(\frac{7}{5} l\right) = \frac{49}{15} p_0 S l = RT_1$$

となるので、この式と式①を比較して、次式を得る。

$$T_1 = \frac{49}{15} T_{\mathrm{A}} \ \cdots\cdots ⑤$$

熱力学第1法則より、与えた熱量 Q_1 は、A 内にある気体の内部エネルギーの増加量 ΔU_1 と、A 内にある気体が外部にした仕事 W_1 の和に等しい。まず、単原子分子の内部エネルギー増加量の式と式⑤より、ΔU_1 は次式のようになる。

$$\Delta U_1 = 1 \cdot \frac{3}{2} R \cdot (T_1 - 2T_{\mathrm{A}}) = \frac{3}{2} R \cdot \left(\frac{49}{15} T_{\mathrm{A}} - 2T_{\mathrm{A}}\right) = \frac{19}{10} RT_{\mathrm{A}}$$

また、W_1 は外気圧にした仕事（ $p_0 S \times \frac{1}{5} l$ ）とばねに蓄積された弾性エネルギーの増加量（ $\frac{1}{2} k \left(\frac{2}{5} l\right)^2 - \frac{1}{2} k \left(\frac{1}{5} l\right)^2$ ）の和になるから、式①と③を用いると次式が得られる。

$$W_1 = p_0 S \times \frac{1}{5} l + \frac{1}{50} k l^2 \cdot (4 - 1) = \frac{1}{5} p_0 S l + \frac{3}{50} \times \frac{10}{3} p_0 S l = \frac{2}{5} p_0 S l = \frac{2}{5} RT_{\mathrm{A}}$$

したがって、

$$Q_1 = \Delta U_1 + W_1 = \frac{19}{10} RT_{\mathrm{A}} + \frac{2}{5} RT_{\mathrm{A}} = \frac{23}{10} RT_{\mathrm{A}}$$

となる。

問３

【方針】

「部屋Bを真空にしてコックを閉じた（状態Ⅳ）」と言う文言より、状態Ⅳにおいてピストンに働く左向きの力はばねによる力だけであることに気づく。また、「熱量 Q_2 を与えた」と言う文言より、熱力学第１法則が適用されることにも気づく。これらの点を踏まえて、「原則５．気体の状態方程式と各法則」や「原則６．熱力学第１法則とモル比熱」の知識を利用して順に解いてゆく。

【解答】

24・25：28　　26・27：15　　28・29：47　　30・31：30

【解説】

状態Ⅳでのピストンのカのつり合いの式は、A内の気体の圧力を p とすると、

$$pS = k \cdot \frac{2}{5} l = \frac{10 p_0 S}{3l} \cdot \frac{2}{5} l = \frac{4}{3} p_0 S \quad \therefore p = \frac{4}{3} p_0 \ \cdots\cdots ⑥$$

となる。また、状態ⅣのＡ内の気体の状態方程式は

$$pS\left(l+\frac{2}{5}l\right)=1\cdot R\cdot T_2$$

であり、これに式⑥を代入すると

$$\frac{4}{3}p_0S\cdot\frac{7}{5}l=RT_2$$

となる。これと式①を比較すると、次式を得る。

$$T_2=\frac{28}{15}T_\mathrm{A}$$

つぎに、状態Ⅳにおける気体の内部エネルギー増加量を ΔU_2 、Ａ内の気体が外部にした仕事を W_2 とおくと、まず ΔU_2 は、問２のときと同様、

$$\Delta U_2=1\cdot\frac{3}{2}R\cdot(T_2-T_\mathrm{A})=\frac{3}{2}R\cdot\left(\frac{28}{15}T_\mathrm{A}-T_\mathrm{A}\right)=\frac{13}{10}RT_\mathrm{A}$$

となる。また W_2 は、本問では外気圧が加わらず、ばねの弾性エネルギーの増加量だけになるので、式①と③を用いると次式が得られる。

$$W_2=\frac{1}{2}k\cdot\left(\frac{2}{5}l\right)^2=\frac{2}{25}kl^2=\frac{2}{25}\times\frac{10}{3}p_0Sl=\frac{4}{15}p_0Sl=\frac{4}{15}RT_\mathrm{A}$$

したがって、

$$Q_2=\Delta U_2+W_2=\frac{13}{10}RT_\mathrm{A}+\frac{4}{15}RT_\mathrm{A}=\frac{47}{30}RT_\mathrm{A}$$

となる。

4

原則７．写像公式（レンズ公式）　　　　→　問１・問２に利用

物体からレンズまでの距離を a 、レンズから像までの距離を b 、レンズの焦点距離を f とすると、次式で表される写像公式（レンズ公式）が成り立つ。

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

なお、凸レンズでは $f>0$ 、凸レンズでは $f<0$ となる。

また、像の倍率（ $\frac{像の大きさ}{物体の大きさ}$ ） m は、次式により求められる。

$$m=\frac{b}{a}=\frac{b-f}{f}$$

問１

【方針】

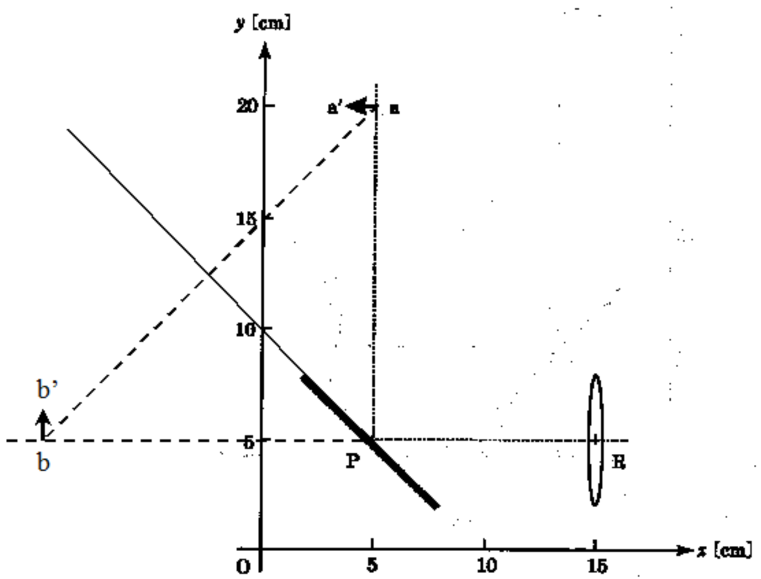
図１より、レンズから左に 25 cm の位置に物体があるときの像の位置を求めればよいことに気づく。この点に着目して、「原則７．写像公式（レンズ公式）」の知識を利用して解く。

【解答】

32・33・34：105　　35：2　　36：7　　37：2

【解説】

下図のように物体 aa’の鏡による像を bb’とすると、aa’から出て鏡で反射しレンズに来る光は、鏡による像 bb’から来る光と同じである。



（図は問題に掲載されている図１に加筆して作成）

よって、b とレンズの距離 u [cm] は

$$u = 15 + 10 = 25 \text{ [cm]}$$

となる。レンズから右に v [cm] の位置に像ができると仮定し、焦点距離を f [cm] とすると、写像公式より次式が成り立つ。

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \quad \cdots\cdots①$$

式①に $u = 25$ [cm] 、$f = 15$ [cm] を代入すると、次式を得る。

$$\frac{1}{25} + \frac{1}{v} = \frac{1}{15} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{15} - \frac{1}{25} = \frac{5-3}{75} = \frac{2}{75} \qquad \therefore v = \frac{75}{2} \text{ [cm]}$$

したがって、求める x 座標 x_1 [cm] は

$$x_1 = v + 15 = \frac{75}{2} + 15 = \frac{105}{2} \text{ [cm]}$$

となる。

また、$v > 0$ であるので、できる像は倒立実像である。実物の大きさは 1 cm であるから、像の大きさ h_1 [cm] は、倍率 m の式により、

$$h_1 = m \times 1 = \left|\frac{v}{u}\right| \times 1 = \frac{\frac{75}{2}}{25} \times 1 = \frac{3}{2} \text{ [cm]}$$

となる。よって、b'の像の位置は、$y = 5$ [cm] よりも $h_1 = \frac{3}{2}$ [cm] だけ下になるので、求める y 座標 y_1 [cm] は

$$y_1 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \text{ [cm]}$$

となる。

問２

【方針】

図 2 より、問 1 との違いは凸レンズと凹レンズの違いだけであることに気づく。また、凹レンズでは焦点距離が負になることに気が付く。これらの点を踏まえて、「原則７．写像公式（レンズ公式)」の知識を利用して解く。

【解答】

38・39：45　　40：8　　41・42：43　　43：8

【解説】

実物からレンズまでの距離は、問 1 と同様に $u = 25$ [cm] である。レンズから右に v' [cm] の位置に凹レンズによる像ができると仮定すると、式①が成り立つが、本問では凹レンズであるから、$f = -15$ [cm] にする必要がある。よって、式①に $u = 25$ [cm] 、$f = -15$ [cm] を代入すると、次式を得る。

$$\frac{1}{25} + \frac{1}{v'} = -\frac{1}{15} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{v'} = -\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{25}\right) = -\frac{8}{75} \qquad \therefore v' = -\frac{75}{8} \text{ [cm]}$$

したがって、像の位置は $v' < 0$ となり、$|v'| < 10$ であるから、レンズより左側で鏡の手前の位置に像はできることがわかる。よって、求める x 座標 x_2 [cm] は

$$x_2 = 15 - \frac{75}{8} = \frac{45}{8} \text{ [cm]}$$

となる。

また、$v' < 0$ であるので、できる像は正立虚像である。像の大きさ h_2 [cm] は、問 1 と同様、

$$h_2 = m \times 1 = \left|\frac{v\prime}{u}\right| \times 1 = \left|\frac{-\frac{75}{8}}{25}\right| \times 1 = \frac{3}{8} \text{ [cm]}$$

となる。よって、b'の像の位置は、$y = 5$ [cm] よりも $h_2 = \frac{3}{8}$ [cm] だけ上になるので、求める y 座標 y_2 [cm] は

$$y_2 = 5 + \frac{3}{8} = \frac{43}{8} \text{ [cm]}$$

となる。

５

原則８．コンデンサーの電気容量　　　　→　５に利用

コンデンサーの電気容量 C [F] は、次式により求められる。

$$C = \varepsilon_{\mathrm{r}} \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

なお、ε_{r} は比誘電率、ε_0 [F/m] は真空の誘電率（$= 8.85 \times 10^{-12}$ [F/m] ）、S [m^2] は極板面積、d [m] は極板間隔である。

原則９．コンデンサーの電気量と静電エネルギー　　　　→　５に利用

電気容量 C [F] のコンデンサーにかかる電圧が V [V] であるとき、このコンデンサーには次の２式で表される電気量 Q [C] および静電エネルギー U [J] が蓄えられている。

$$Q = CV \quad \cdots\cdots①$$

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \quad \cdots\cdots②$$

式①より、式②は以下のようにも表せる。

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q V = \frac{Q^2}{2C} \quad \cdots\cdots③$$

【方針】

K は金属板であるから、K に蓄えられた電荷は K の左面と右面だけに局在することに気づく。この点を最初の着目点として、「原則８．コンデンサーの電気容量」や「原則９．コンデンサーの電気量と静電エネルギー」の知識などを利用して順に解いてゆく。

【解答】

44：1　　45：2　　46：3　　47：2　　48：3　　49：8　　50：1

51：2　　52：3　　53・54：32

【解説】

K の右面と B によるコンデンサーの極板間隔は $2d$ であるから、求める容量 C_2 は、

$$C_2 = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{2d} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad \cdots\cdots(\text{解答 } 44 \cdot 45)$$

となる。

また、A と K の左面によるコンデンサーの容量 C_1 は、

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

となる。

S_0 を閉じたとき、K の左面と A に蓄えられている電気量をそれぞれ $+Q_1$ 、$-Q_1$ とし、K の右面と B に蓄えられている電気量をそれぞれ $+Q_2$ 、$-Q_2$ とすると、次の２式が成り立つ。

$$Q_1 = C_1 V_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \cdot V_0 \quad , \quad Q_2 = C_2 V_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} \cdot V_0$$

よって、Kに蓄えられている電気量は

$$Q_1+Q_2=\frac{\varepsilon_0 SV_0}{d}+\frac{\varepsilon_0 SV_0}{2d}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0 SV_0}{d} \quad \cdots\cdots(解答 46・47)$$

となる。

また、AK間の電場の強さ E_1 は、次式のようになる。

$$V_0=E_1 d \qquad \therefore E_1=\frac{V_0}{d}$$

なお、E_1 の $\frac{1}{2}$ がAの電荷からの寄与になるから、KはAから左向きに力を受け、この力の大きさ F_1 は

$$F_1=Q_1\times\frac{E_1}{2}=\frac{\varepsilon_0 SV_0}{d}\cdot\frac{V_0}{2d}=\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{2d^2}$$

となる。同様に、KB間の電場の強さ E_2 は、

$$V_0=E_2\cdot 2d \qquad \therefore E_2=\frac{V_0}{2d}$$

となり、E_2 の $\frac{1}{2}$ がBの電荷からの寄与になるから、KはBから右向きに力を受け、この力の大きさ F_2 は

$$F_2=Q_2\times\frac{E_2}{2}=\frac{\varepsilon_0 SV_0}{2d}\cdot\frac{V_0}{4d}=\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{8d^2}$$

となる。よって、$F_1>F_2$ であるから、求める合力の大きさ F は

$$F=F_1-F_2=\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{2d^2}-\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{8d^2}=\frac{3}{8}\cdot\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{d^2} \quad \cdots\cdots(解答 48・49)$$

となる。

S_0を開いてKを移動したとき、AK間、KB間の各コンデンサーの容量 C_1' 、C_2' は、次の2式で表される。

$$C_1'=\varepsilon_0\frac{S}{d+p} \quad , \quad C_2'=\varepsilon_0\frac{S}{2d-p}$$

よって、平行移動したKの左面と右面に蓄えられている電気量をそれぞれ $Q_1{}'$ 、$Q_2{}'$ とおくと、Kにおける電気量保存則より、次式が成り立つ。

$$Q_1{}'+Q_2{}'=Q_1+Q_2=\frac{3\varepsilon_0 SV_0}{2d} \quad \cdots\cdots①$$

Kの電位を V とおくと、AとBは接地されていて電位が 0 [V] であるから、次の2式が成り立つ。

$$Q_1{}'=C_1'\cdot V=\frac{\varepsilon_0 S}{d+p}\cdot V \quad \cdots\cdots②$$

$$Q_2'=C_2'\cdot V=\frac{\varepsilon_0 S}{2d-p}\cdot V \quad \cdots\cdots③$$

よって、式②と③を式①に代入して、次式を得る。

$$\frac{\varepsilon_0 S}{d+p}\cdot V+\frac{\varepsilon_0 S}{2d-p}\cdot V=\frac{3\varepsilon_0 SV_0}{2d}$$

$$\frac{\{(2d-p)+(d+p)\}\cdot\varepsilon_0 S}{(d+p)(2d-p)}\cdot V=\frac{3\varepsilon_0 S V_0}{2d}$$

$$\therefore V=\frac{1}{2}\cdot\frac{V_0(2d-p)(d+p)}{d^2}$$ ……（解答 50・51）

以上の各式より、$p=\frac{d}{2}$ の場合、

$$C_1'=\varepsilon_0\frac{S}{d+\frac{d}{2}}=\frac{2\varepsilon_0 S}{3d}\quad,\quad C_2'=\varepsilon_0\frac{S}{2d-\frac{d}{2}}=\frac{2\varepsilon_0 S}{3d}$$

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{V_0\left(2d-\frac{d}{2}\right)\left(d+\frac{d}{2}\right)}{d^2}=\frac{9}{8}V_0$$

となる。

K を $p=0$ から $p=\frac{d}{2}$ まで移動するのに外力がする仕事 W は、AK と KB の両コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーの増加量と等しいから、次式が成り立つ。

$$W=\left(\frac{1}{2}C_1'V^2+\frac{1}{2}C_2'V^2\right)-\left(\frac{1}{2}C_1{V_0}^2+\frac{1}{2}C_2{V_0}^2\right)$$

この式に、C_1 、C_2 、C_1' 、C_2' および V を代入して計算すると、次式を得る。

$$W=\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{2\varepsilon_0 S}{3d}\cdot\left(\frac{9}{8}V_0\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2\varepsilon_0 S}{3d}\cdot\left(\frac{9}{8}V_0\right)^2\right\}-\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0 S}{d}\cdot{V_0}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0 S}{2d}\cdot{V_0}^2\right\}$$

$$=\left(\frac{27}{32}-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{d}=\frac{3}{32}\cdot\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{d}$$ ……（解答 52・53・54）