

Q. (数 2B 標準問題精講 p276 (2))

S=…の1行目から2行目への式変形が分かりません。

A. 前提として、解説作成者は次の公式を使いたがっています。

$$-\int_a^b (x-a)(x-b)dx = \frac{1}{6}(b-a)^3$$

$y=f(x)$ と $y=mx$ は、 $x=0, 1+m$ で解を持ちます。つまり、 $f(x)-mx=x(x-1-m)$ になります。よって、できるだけ次の形を作りたいと思って、式変形しています。

$$-\int_0^{1+m} x(x-1-m)dx$$

さて、1行目から2行目への式変形については、 $f(x)$ に関わるものだけについて説明していきます (mx も同じような考えのため)。まずは黄色い部分に注目をして、次のような式変形になります。

1行目 =

$$\begin{aligned} & \int_0^{1-m} \{-f(x)\}dx + \int_{1-m}^1 \{f(x)\}dx + \int_1^{1+m} \{-f(x)\}dx \\ &= -\int_0^{1+m} \{f(x)\}dx + \int_0^1 \{f(x)\}dx - \int_0^{1-m} f(x)dx + \int_{1-m}^1 \{f(x)\}dx \end{aligned}$$

続いて、灰色の部分に注目すると、

$$\begin{aligned} &= -\int_0^{1+m} \{f(x)\}dx + \int_0^1 \{f(x)\}dx - \int_0^{1-m} f(x)dx + \int_{1-m}^1 \{f(x)\}dx \\ &= -\int_0^{1+m} \{f(x)\}dx + \int_0^1 \{f(x)\}dx + \int_{1-m}^0 f(x)dx + \int_{1-m}^1 \{f(x)\}dx \\ &= -\int_0^{1+m} \{f(x)\}dx + \int_{1-m}^1 \{f(x)\}dx + \int_{1-m}^1 \{f(x)\}dx \end{aligned}$$

となるので、結果的に、

$$= -\int_0^{1+m} \{f(x)\}dx + 2\int_{1-m}^1 \{f(x)\}dx$$

となるのです。わかりましたでしょうか？