

昭和大学医学部入試問題

2014年I期数学

解答・解説編

【解答】

1

(1)(1-1)8 (1-2)12 (2)(2-1)1 ≤ a < 2 (2-2) $\frac{5}{6}\pi$

(3)(3-1)2:5 (3-2) $\frac{5}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}$

2

(1)(1-1) $\frac{1}{2}$ (1-2) $\frac{|t-2|}{t^2-t+2}$

(2)

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ であるので $\tan \theta$ が最大の時の θ が最大である。

$f(t) = \frac{|t-2|}{t^2-t+2}$ とおくと

(i) $t < 2$ のとき $f(t) = \frac{-t+2}{t^2-t+2}$

であるので

$$f'(t) = \frac{-(t^2-t+2) + (t-2)(2t-1)}{(t^2-t+2)^2} = \frac{t(t-4)}{(t^2-t+2)^2}$$

(ii) $2 \leq t$ のとき

$$f(t) = \frac{t-2}{t^2-t+2} = \frac{-t+2}{t^2-t+2}$$

であるので, (i) より

$$f'(t) = -\frac{t(t-4)}{(t^2-t+2)^2}$$

$t = 0, 4$ のとき $f'(t) = 0$ であるので増減表は右のようになる。

$t = 0$ のとき $f(t)$ の値が最大となる。

そのとき

$$-t+2 = -0+2 = 2$$

すなわち θ を最大にする点 P の座標は $(0, 2)$ (答)であり, そのとき $\tan \theta = 1$ (答)

t	...	0	...	2	...	4	...
$f'(t)$	+	0	-	/	+	0	-
$f(t)$	↗	1	↘	0	↗	$\frac{1}{7}$	↘

3

(1)(1-1) $\frac{21}{256}$ (1-2) $\frac{3}{16}$ (1-3) $\frac{63}{16}$ (2) $1 < a < \sqrt{5}$

(3)(3-1) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3-2) $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4

$$(1)(1-1)a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \quad (1-2)c = 22$$

(2) $2x + y \geq 0$ かつ $2x - y \geq 0$ のとき

$$(2x + y) + (2x - y) = 2$$

なので $x = \frac{1}{2} \dots \dots \textcircled{1}$

$2x + y \geq 0$ かつ $2x - y < 0$ のとき

$$(2x + y) - (2x - y) = 2$$

なので $y = 1 \dots \dots \textcircled{2}$

$2x + y < 0$ かつ $2x - y < 0$ のとき

$$-(2x + y) - (2x - y) = 2$$

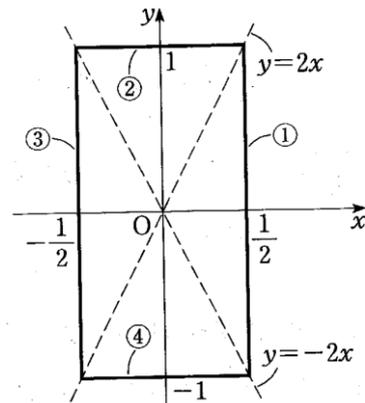
なので $x = \frac{1}{2} \dots \dots \textcircled{3}$

$2x + y < 0$ かつ $2x - y \geq 0$ のとき

$$-(2x + y) + (2x - y) = 2$$

なので $y = -1 \dots \dots \textcircled{4}$

よって求めるグラフは右図の実線部分の長方形である。



【解説】

①小問集合

○原則

(1) ◆指数関数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

i) $a > 1$ のとき $p < q \Leftrightarrow a^p < a^q$ 増加関数

ii) $0 < a < 1$ のとき $p < q \Leftrightarrow a^p > a^q$ 減少関数

◆対数関数 $y = \log_a x$ (底の条件 $a > 0, a \neq 1$ 真数条件 $x > 0$)

i) $a > 1$ のとき $p < q \Leftrightarrow \log_a p < \log_a q$ 増加関数

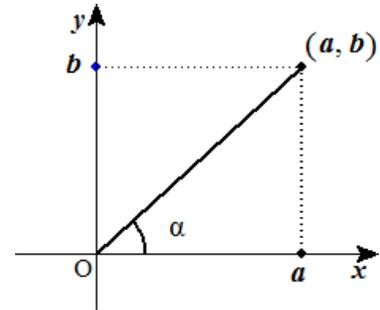
ii) $0 < a < 1$ のとき $p < q \Leftrightarrow \log_a p > \log_a q$ 減少関数

(2) ◆三角関数の合成

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

ただし、

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



◆方程式とグラフ

方程式 $f(x) = a$ (a : 定数) の解の個数は、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ との共有点の個数と一致する。

このように、方程式をグラフの視点で見るとはとても重要です。

◆2次方程式の解と係数の関係

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) の2つの解を α, β とおく。

このとき、

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

(3) ◆2つのベクトルの直交条件

$$\vec{a} \perp \vec{b} (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

◆ベクトルの分解

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$, \vec{a} と \vec{b} が平行でないとき、任意のベクトル \vec{p} は、次のように

ただ一通りに表すことができる。

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \text{ただし } s, t \text{ は実数}$$

○解答・解説

(1)

【方針】

(1-1) 指数関数の不等式を原則のような形に変形することを考えます。その為に、 $2^{x+2} - 2^x$ をどうにかしたいのですが、よく見ると 2^x で括れますね。

(2-2) $\log_2 x^6 = 6 \log_2 x$ としてしまうと、その後の計算が大変です。計算がし易くなるように、 $\log_2 x^6$ を変形します。

【解説】

(1-1) $2^{x+2} - 2^x = 2^x(2^2 - 1) = 3 \cdot 2^x$ より、与えられた連立不等式は、

$$600 < 3 \cdot 2^x < 900$$

$$200 < 2^x < 300$$

$2^7 = 128, 2^9 = 512$ より、

$$2^7 < 200 < 2^x < 300 < 2^9$$

底は 2 なので、増加関数です。

この不等式を満たす自然数 x は、 $x = 8$

(1-2) $\log_2 x^6$ をうまく使うために、一つずつ不等式を解きます。

i) $21 < \log_2 x^6$

$\log_2 x^6 = 3 \log_2 x^2$ より、

$$21 < 3 \cdot \log_2 x^2$$

$$7 < \log_2 x^2$$

$$\log_2 2^7 < \log_2 x^2$$

$$2^7 < x^2$$

$$128 < x^2 \dots \textcircled{1}$$

底は 2 なので、増加関数です。

$11^2 = 121, 12^2 = 144$ で、 $\textcircled{1}$ を満たす自然数 x は、 $x \geq 12 \dots \textcircled{2}$

ii) $\log_2 x^6 < 22$

$\log_2 x^6 = 2 \log_2 x^3$ より、

$$2 \cdot \log_2 x^3 < 22$$

$$\log_2 x^3 < 11$$

底は 2 なので、増加関数です。

$$\log_2 x^3 < \log_2 2^{11}$$

$$x^3 < 2048 \dots \textcircled{3}$$

$$12^3 = 1728, 13^3 = 2197 \text{ で、} \textcircled{3} \text{ を満たす自然数 } x \text{ は、} x \geq 12 \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2}\textcircled{4} \text{ の両方をみたす自然数 } x \text{ は、} \underline{x = 12}$$

(2)

【方針】

(2-1) 原則に従って、 $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x$ と $y = a$ のグラフを書きます。2つのグラフの共有点の個数が2個となるような a の値の範囲を読み取ります。

$y = \sqrt{3} \sin x - \cos x$ は合成してグラフを書きましょう。

(2-2) $\alpha + \beta$ の値を求めるには、まず $\tan(\alpha + \beta)$ の値を求めます。加法定理を使うと $\tan \alpha + \tan \beta$, $\tan \alpha \tan \beta$ の形がでてきます。条件と合わせて、2次方程式の解と係数の関係を使うことに気が付きます。

【解説】

(2-1) 方程式の解の個数を、グラフの共有の個数という視点から見ます。つまり、方程式 $\sqrt{3} \sin x - \cos x = a$ より、 $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x$ と $y = a$ のグラフを書いて、共有点について調べるのです。

$$y = \sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$0 \leq x \leq \pi$ のときの、 $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ の

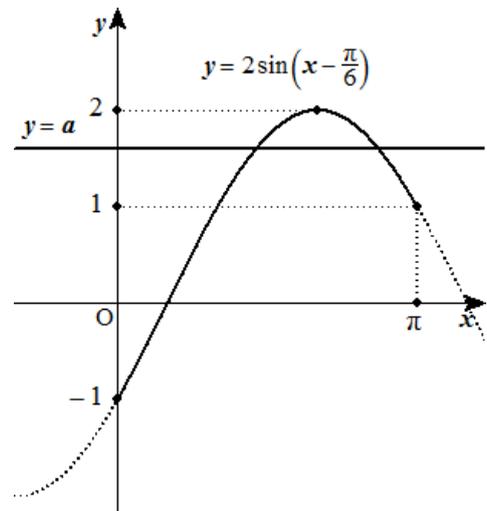
グラフは、右のようになります。

直線 $y = a$ との共有点の個数が2個となるのは、

$$1 \leq a < 2$$

時です。

$$\therefore \underline{1 \leq a < 2}$$



(2-2) $\alpha + \beta$ の値を求める為に、 $\tan(\alpha + \beta)$ の値を求めます。加法定理から、

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \dots \textcircled{5}$$

ここで、条件より解と係数の関係から、

$$\tan \alpha + \tan \beta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdots \textcircled{6}, \quad \tan \alpha \tan \beta = -1 \cdots \textcircled{7}$$

⑥⑦を⑤に代入して、

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - (-1)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$0 < \alpha + \beta < \pi \text{ より、 } \alpha + \beta = \underline{\underline{\frac{5}{6}\pi}}$$

(3)

【方針】

(3-1) 点 H がどのような点なのかに着目すると、それは垂線の足です。従って、OH と AB は垂直です。垂直といったら内積が 0 を利用します。 \overrightarrow{OH} を設定し、 $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ を計算しましょう。

(3-2) 点 C は、OH 上の点でもあり、AM 上の点でもあります。このことから、 \overrightarrow{OC} を \vec{a} と \vec{b} を用いて 2 通りの方法で表します。原則から、 \overrightarrow{OC} の表し方は 1 通りなので、 \vec{a} と \vec{b} の係数が等しくなります。それにより、連立方程式がたちます。

【解説】

(3-1) $AH : HB = k : (1 - k)$ とおくと、

$$\overrightarrow{OH} = (1 - k)\vec{a} + k\vec{b}$$

OH \perp AB より、 $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

従って、

$$\{(1 - k)\vec{a} + k\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$(k - 1)|\vec{a}|^2 + k|\vec{b}|^2 + (1 - 2k)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

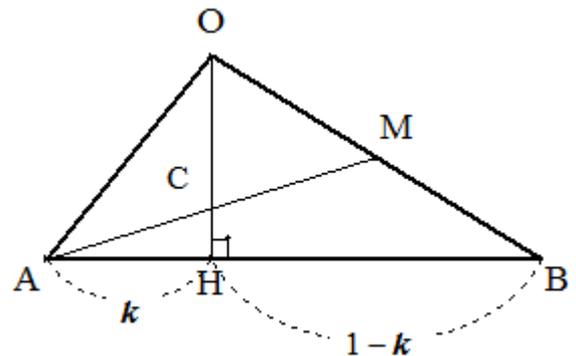
ここで、

$$|\vec{a}| = 1, \quad |\vec{b}| = 2, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 120^\circ = 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

なので、

$$(k - 1) \cdot 1^2 + k \cdot 2^2 + (1 - 2k)(-1) = 0$$

$$7k = 2 \quad \therefore k = \frac{2}{7}$$



$$\therefore AH : HB = \frac{2}{7} : \frac{5}{7} = 2 : 5$$

(3-2) 点 C は、線分 OH 上にあるので、実数 l を用いて、

$$\overrightarrow{OC} = l\overrightarrow{OH} = l\left(\frac{5}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}\right) = \frac{5l}{7}\vec{a} + \frac{2l}{7}\vec{b} \dots \textcircled{8}$$

また、点 C は線分 AM 上にあるので、 $AC : CM = m : 1 - m$ とおくと

$$\overrightarrow{OC} = (1 - m)\vec{a} + m\left(\frac{1}{2}\vec{b}\right) = (1 - m)\vec{a} + \frac{m}{2}\vec{b} \dots \textcircled{9}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \nparallel \vec{b}$ より、 \overrightarrow{OC} は、 \vec{a}, \vec{b} を用いてただ一通りに表せるので、
 $\textcircled{8}\textcircled{9}$ より、

$$\begin{cases} \frac{5l}{7} = 1 - m \\ \frac{2l}{7} = \frac{m}{2} \end{cases}$$

この連立方程式を解くと、

$$l = \frac{7}{9}, \quad m = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \overrightarrow{OC} = \frac{5}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}$$

②平面図形

○原則

1. ◆直線の傾き

傾きが m の直線と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると、

$$m = \tan \theta$$

2. ◆2直線のなす角

2直線 l, m が交わるとする。 x 軸の正の向きと直線 l とのなす角を α 、直線 m と
 なす角を β ($0 \leq \alpha < \beta < \pi$) としたとき、2直線 l, m のなす鋭角 θ は、

$$\theta = \beta - \alpha \text{ または } \theta = \pi - (\beta - \alpha)$$

3. ◆加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

4. ◆関数の最大値・最小値を求める

基本の考えは、グラフを書いてグラフから最大値・最小値を読み取ることです。その為に微分して増減表を書きます。

たまに、有名不等式(相加平均・相乗平均の関係など)を使って解くこともあります。

○解答・解説

(1)

【方針】

(1-1) 三角比 $\tan \theta$ の定義を使います。

(1-2) θ は2直線 AP と BP とのなす角です。原則に従って、直線 AP と x 軸とのなす角を α 、直線 BP と x 軸とのなす角を β として、 θ を α, β で表します。

【解説】

(1-1) $t = -2$ のとき $\triangle PAB$ は、 $\angle A = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形なので、

$\tan \theta$ の定義から、

$$\tan \theta = \frac{AB}{PA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

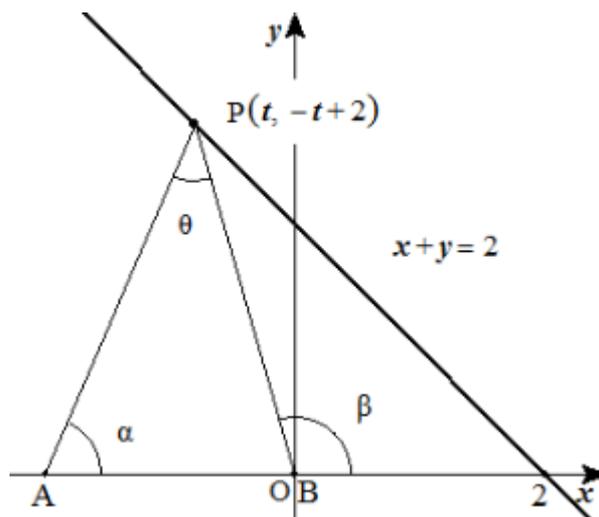
(1-2) 直線 AP と x 軸の正の向きとのなす角を α 、直線 BP と x 軸の正の向きとのなす角を β とおきます ($0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$)。 θ は2直線 AP と BP とのなす角なので、 α と β の差で表すことができます。ただ、 α と β どちらの角が大きいかで、場合分けが必要です。また、

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{2} \text{ のときは } \tan \alpha, \tan \beta \text{ が}$$

定義されないので注意します。

i) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき

このときは、 $t = -1$ のときで、(1-1)より、 $\tan \theta = \frac{1}{2}$



$\beta = \frac{\pi}{2}$ のとき

このときは、 $t = 0$ のときで、 $\triangle PBA$ が直角三角形であることから

$$\tan \theta = \frac{BA}{PB} = \frac{2}{2} = 1$$

ii) $\beta > \alpha$ のとき、このときは点 P が第 I 象限、第 II 象限にあるときで、
 $t < -2, -2 < t < 0, 0 < t < 2$ のとき

$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \dots \textcircled{1}$$

ここで、 $\tan \alpha$ は、直線 AP の傾きなので、

$$\tan \alpha = \frac{-t + 2}{t + 2} \dots \textcircled{2}$$

$\tan \beta$ は、直線 BP の傾きなので、

$$\tan \beta = \frac{-t + 2}{t} \dots \textcircled{3}$$

②③を①に代入して、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\frac{-t + 2}{t} - \frac{-t + 2}{t + 2}}{1 + \frac{-t + 2}{t} \cdot \frac{-t + 2}{t + 2}} = \frac{(2 - t)(2 + t) - t(2 - t)}{t(t + 2) + (2 - t)^2} \\ &= \frac{-2t + 4}{2t^2 - 2t + 4} \\ &= \frac{-t + 2}{t^2 - t + 2} \end{aligned}$$

iii) $\alpha \geq \beta$ のとき、このときは点 P が第 IV 象限にあるか、 x 軸上のときなので、
つまり、 $t \geq 2$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) = -\tan(\beta - \alpha) \\ &= \frac{t - 2}{t^2 - t + 2} \end{aligned}$$

i) は ii) に含まれているので、iii) と合わせて

$$\tan \theta = \frac{|t - 2|}{t^2 - t + 2}$$

(2)

【方針】

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\tan \theta$ は単調増加関数です。従って、 θ が最大となるのは、 $\tan \theta$ が最大になるときです。(1-2)より、 $\tan \theta$ は t についての関数なので微分して増減表を書きましょう。増減表から、 $\tan \theta$ の最大値を読み取ります。

【解説】

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\tan \theta$ は単調増加関数なので、 $\tan \theta$ が最大になるとき、 θ も最大になります。そこで、(1-2)より

$$f(t) = \frac{|t-2|}{t^2-t+2}$$

とにおいて、 $f(t)$ の増減表を作ります。

商の微分
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

i) $t \geq 2$ のとき

$$f(t) = \frac{t-2}{t^2-t+2}$$

$$f'(t) = \frac{1 \cdot (t^2 - t + 2) - (t - 2) \cdot (2t - 1)}{(t^2 - t + 2)^2}$$

$$= \frac{-t^2 + 4t}{(t^2 - t + 2)^2} = \frac{-t(t - 4)}{(t^2 - t + 2)^2}$$

ii) $t < 2$ のとき

$$f(t) = -\frac{t-2}{t^2-t+2}$$

$$f'(t) = \frac{t(t-4)}{(t^2-t+2)^2}$$

t	...	0	...	2	...	4	...
$f'(t)$	+	0	-	/	+	0	-
$f(t)$	↗	1	↘	0	↗	$\frac{1}{7}$	↘

増減表より、 $t = 0$ のとき $f(t)$ は最大値をとります。その時の点 P の座標は (0, 2) です。

\therefore P(0, 2) のとき、 θ は最大値をとり、 $\tan \theta = 1$

③小問集合

○原則

(1) ◆独立試行

2つの試行 T_1, T_2 があり、試行 T_1 , 試行 T_2 の結果がお互いに全く影響を及ぼさないとき、試行 T_1 と試行 T_2 は独立であるといいます。

また、試行 T_1 でAが起こり、かつ試行 T_2 でBが起こる確率は、 $P(A) \cdot P(B)$ となります。

◆期待値の計算

ある試行によって得られる数値を $x_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$, そのときの確率を $P(x_i)$ とします。この試行の期待値は、次の式となります。

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i)$$

(2) ◆2次方程式の解の配置問題

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ が k より小さい相異なる2つの実数解を持つようにするには、次のように考えます。

I) グラフの利用。 $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおきます。

$$\textcircled{1} f(x) = 0 \text{ の判別式 } D > 0 \quad \textcircled{2} \text{ 軸 } x = -\frac{b}{2a} < k \quad \textcircled{3} f(k) > 0$$

II) 解と係数の関係を利用。2次方程式の2解を α, β とします。

$$\textcircled{1} \text{ 判別式 } D > 0 \quad \textcircled{2} \alpha + \beta < 2k \quad \textcircled{3} (\alpha - k)(\beta - k) > 0$$

◆対数の底の条件と真数条件

$\log_a b$ において、底の条件は、 $0 < a, a \neq 1$ 、真数条件は、 $0 < b$ となります。

◆対数関数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$

i) $a > 1$ のとき $p < q \Leftrightarrow \log_a p < \log_a q$

ii) $0 < a < 1$ のとき $p < q \Leftrightarrow \log_a p > \log_a q$

(3) ◆行列の掛け算

I) 積の定義 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$ のとき、 $AB = \begin{pmatrix} as + bu & at + bv \\ cs + du & ct + dv \end{pmatrix}$

II) 一般に積の交換法則は成り立ちません。 $AB \neq BA$

◆単位行列と逆行列

A, B, E は正方行列とします。

I) $AE = EA = A$ を満たす行列 E を単位行列といいます。

2 次の単位行列は、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ です。

II) $AB = BA = E$ (E は単位行列) を満たす行列 B を A の逆行列といい A^{-1} で表します。

○解答・解説

(1)

【方針】

(1-1)(1-2) どんなときに、 $R = 1$ や $R = 4$ となるか具体的に考えます。また、球をもとの袋に戻し、同じ試行を繰り返すので、反復試行となります。

(1-3) $R = 0 \sim 7$ となるときの確率を計算します。(1-1)(1-2)と同様に考えます。期待値は定義の式に沿って計算します。

【解説】

(1-1) 3つの球の数字を a, b, c ($a \leq b \leq c$) とおきます。

$R = 1$ となるのは、 $c - a = 1$ のときです。例えば $(a, b, c) = (1, 1, 2), (1, 2, 2) \dots (*)$ があります。3回の試行を終えた結果、取り出した球の数字が、1, 1, 2 となるような球の取り出し方は、 ${}_3C_1$ 通りあり、同様に、1, 2, 2 の場合も ${}_3C_1$ 通りです。

従って、(*)のような球の取り出し方は、 ${}_3C_1 \times 2$ 通りです。

このようなことから、 $R = 1$ となるのは、 $(a, b, c) = (a, a, a + 1), (a, a + 1, a + 1)$ のときで、 a は 1 から 7 までの 7 通りの数字が考えられます。よって、場合の数は

$$7 \times {}_3C_1 \times 2 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \text{ 通り}$$

求める確率は、

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{8^3} = \frac{21}{256}$$

(1-2) $R = 4$ となるのは、 $c - a = 4$ のときです。

例えば $(a, b, c) = (1, 1, 5), (1, 2, 5), \dots, (1, 5, 5)$ があります。

このようなことから、 $R = 4$ となるのは、

$$(a, b, c) = (a, b, a + 4)$$

のときで、 b の値によって次の2通りに場合分けします。

i) $b = a, a + 4$ のとき

a は1~4までの4通り、 b は $a, a + 4$ の2通り、球の取出し方で ${}_3C_1$ 通り
 $4 \times 2 \times {}_3C_1 = 4 \times 2 \times 3$ 通り

ii) $a < b < a + 4$ のとき

a は1~4までの4通り、 b は $a + 1, a + 2, a + 3$ の3通り。球の取出し方は、 $3!$ 通り

$$4 \times 3 \times 3! \text{ 通り}$$

i) ii) より、 $R = 4$ となる場合の数は、

$$4 \times 2 \times 3 + 4 \times 3 \times 3! = 4 \times 3 \times 2 \times 4 \text{ 通り}$$

求める確率は、

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 4}{8 \times 8 \times 8} = \frac{3}{16}$$

(1-3) R の期待値を求めるために、 $R = 0 \sim 7$ となるそれぞれの確率が必要です。

$R = 1$ と 4 は、(1-1)(1-2)で求めたので、それ以外の値の時の確率を求めていきます。

$R = 0$ のときは、 (a, a, a) のように3つ同じ数字になる場合。

a は1~8まで取り得るので、全部で8通り。

以降の場合の数の求め方は、(1-2)と同様に考えます。

$R = 2$ のとき、 $(a, b, a + 2)$ なので

$$6 \times 2 \times {}_3C_1 + 6 \times 1 \times 3!$$

$R = 3$ のとき、 $(a, b, a + 3)$ なので

$$5 \times 2 \times {}_3C_1 + 5 \times 2 \times 3!$$

$R = 5$ のとき、 $(a, b, a + 5)$ なので

$$3 \times 2 \times {}_3C_1 + 3 \times 4 \times 3!$$

$R = 6$ のとき、 $(a, b, a + 6)$ なので

$$2 \times 2 \times {}_3C_1 + 2 \times 5 \times 3!$$

$R = 7$ のとき、 $(a, b, a + 7)$ なので

$$1 \times 2 \times {}_3C_1 + 1 \times 6 \times 3!$$

以上より期待値は、

$$\begin{aligned} \sum_{R=0}^7 R \cdot P(R) &= \sum_{R=1}^7 R \cdot P(R) \\ &= \sum_{R=1}^7 R \cdot \frac{(8-R) \cdot 2 \cdot {}_3C_1 + (8-R) \cdot (R-1) \cdot 3!}{8^3} \\ &= \frac{6}{8^3} \sum_{R=1}^7 R^2(8-R) = \frac{3}{4 \cdot 8^2} \sum_{R=1}^7 (8R^2 - R^3) \\ &= \frac{3}{4 \cdot 8^2} \cdot \left\{ 8 \cdot \frac{1}{6} \cdot 7 \cdot 8 \cdot 15 - \left(\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \right)^2 \right\} \\ &= \frac{3}{4 \cdot 8^2} \cdot (4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5 - 7^2 \cdot 4^2) \\ &= \frac{3}{4 \cdot 8^2} \cdot 4^2 \cdot 7(2 \cdot 5 - 7) = \frac{63}{16} \end{aligned}$$

(2)

【方針】

原則に従って、不等式をたてていきます。対数不等式では、底と真数の条件に注意しましょう。

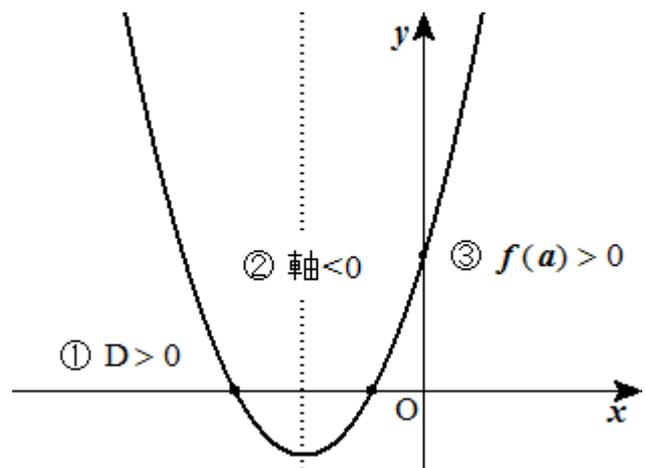
【解説】

グラフを使って、2次方程式の相異なる2つの解が負となる場合を考えます。

放物線 $y = f(x) = x^2 + (\log_a 5)x + \log_5 a^2$ とおきます。底と真数条件から、 $a > 0, a \neq 1$

まず、 x 軸と異なる2点で交わるので、この2次方程式の判別式 $D > 0$ 、

$$D = (\log_a 5)^2 - 4 \cdot \log_5 a^2 > 0 \dots \textcircled{1}$$



次に、軸は負となるので、

$$-\frac{\log_a 5}{2} < 0 \dots \textcircled{2}$$

また、 $f(0) > 0$ より

$$\log_5 a^2 > 0 \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{より } a > 1 \quad \textcircled{3} \text{より } a^2 > 1 \therefore a > 1 \dots \textcircled{4}$$

①より、

$$(\log_a 5)^2 - 4 \cdot \frac{\log_a a^2}{\log_a 5} > 0$$

$t = \log_5 a$ とおくと、④より $t > 0$

$$t^2 - \frac{8}{t} > 0$$

$$t^3 - 8 > 0 (\because t > 0)$$

$$(t - 2)(t^2 + 2t + 4) > 0$$

$t^2 + 2t + 4 = (t + 1)^2 + 3 > 0$ より、 $t > 2$ (これは、 $t > 0$ を満たします。)

従って、

$$\log_a 5 > 2 = \log_a a^2$$

底 $a > 1$ より $\log_a x$ は増加関数ですから、

$$5 > a^2$$

$$-\sqrt{5} < a < \sqrt{5}$$

$$\textcircled{4} \text{と合わせて、} \underline{1 < a < \sqrt{5}}$$

[別解] 解と係数の関係を用いて解くことができます。

2次方程式の2解を α, β とおくと、

$$\begin{cases} \alpha < 0 \\ \beta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta < 0 \\ \alpha\beta > 0 \end{cases}$$

なので、解と係数の関係を用いて

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\log_a 5 < 0 \\ \alpha\beta = \log_5 a^2 > 0 \end{cases}$$

これは、先ほどの②③となります。判別式 $D > 0$ とあわせて、以降は同様なので省略します。

《注意》 解と係数を使う場合、問題によっては注意が必要です。例えば2次方程式の

2解が-1より小さくなるという条件のとき、うっかり

$$\begin{cases} \alpha < -1 \\ \beta < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta < -2 \\ \alpha\beta > 1 \end{cases}$$

としてしまうと、間違いです。⇔は成立しません。(反例： $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -3$)

正しくは、

$$\begin{cases} \alpha < -1 \\ \beta < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta < -2 \\ (\alpha + 1)(\beta + 1) > 0 \end{cases}$$

です。

(3)

【方針】

(3-1) 条件の式から、行列 B を消去して行列 A についての方程式をたてます。そして、 A が逆行列を持つことを利用して A^3 を求めます。

(3-2) (3-1)の結果を利用すると、連立方程式がたちます。

【解説】

(3-1) 条件より、

$$A^2 = B \cdots \textcircled{5}, \quad B^2 = A \cdots \textcircled{6}$$

⑥に⑤を代入して、

$$\begin{aligned} A &= B^2 = B \cdot B = A^2 \cdot A^2 = A^4 \\ A &= A^4 \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

ここで、行列 A の行列式は、 $\det A = a \cdot a - b \cdot (-b) = a^2 + b^2 > 0$ ($\because b > 0$)
なので、逆行列 A^{-1} が存在します。 A^{-1} を⑦の両辺に左側から掛けて、

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= A^{-1} \cdot A^4 \\ E &= A^3 \quad (E \text{ は単位行列}) \\ \therefore A^3 &= E = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

(3-2) A^3 を計算して(3-1)の結果から a, b についての連立方程式を立てます。

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 - 3ab^2 & 3a^2b - b^3 \\ -3a^2b + b^3 & a^3 - 3ab^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3-2)より、 $A^3 = E$ なので、各成分比較をして、

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 1 \dots \textcircled{8} \\ 3a^2b - b^3 = 0 \dots \textcircled{9} \end{cases}$$

⑨と $b > 0$ から、 $b^2 = 3a^2$ を⑧に代入して、

$$a^3 - 3a \cdot 3a^2 = 1$$

$$8a^3 + 1 = 0$$

$$(2a + 1)(4a^2 - 2a + 1) = 0$$

$$4a^2 - 2a + 1 = 4\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ より、}$$

$$2a + 1 = 0, \therefore a = -\frac{1}{2}$$

このとき、

$$b^2 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$b > 0 \text{ より、} b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

以上より、

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

[別解] 与えられた A の形から、回転行列を使って解くこともできます。

$b > 0$ より、 $a^2 + b^2 > 0$ なので、

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ただし、

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (0 < \theta < \pi)$$

とおくことができます。

このとき、

$$A^3 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^3 \begin{pmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{pmatrix}$$

なので、(3-1)より、

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^3 \cos 3\theta = 1 \cdots (イ), \quad \sin 3\theta = 0 \cdots \textcircled{8}(\ロ)$$

$0 < 3\theta < 3\pi$ なので、(ロ)より

$$3\theta = \pi, 2\pi$$

(イ)より、 $\cos 3\theta > 0$ なので、 $3\theta = 2\pi$

このとき、(イ)より、 $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$

以上より、

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{2}{3}\pi & \sin \frac{2}{3}\pi \\ -\sin \frac{2}{3}\pi & \cos \frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$\therefore a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

④小問集合

○原則

(1) ◆置換積分

方法Ⅰ) $x = g(t)$ とおく。

$$\int f(x)dx = \int f(x) \frac{dx}{dt} dt = \int f(g(t))g'(t)dt$$

方法Ⅱ) $g(x) = t$ とおく。

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t) \frac{dt}{dx} dx = \int f(t)dt$$

◆部分積分

$$\int f'gdx = fg - \int fg'dx$$

◆数列の和

$$\sum_{k=1}^n \{f(k) - f(k+1)\} = f(1) - f(n+1)$$

(2) ◆絶対値の定義

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

○解答・解説

(1)

【方針】

(1-1) 定積分が計算できれば数列 $\{a_n\}$ の一般項が求まります。この積分は、置換積分でも部分積分でもどちらでも計算できます。(1-2) $\sum(a_n - a_{n+1})$ の計算であれば、原則のように、直ぐに計算できます。しかしこの問題では、それに $(n+c)$ が掛かっているために、このままではうまくいきません。ただ、間が相殺されるというアイデアは使いたないので、無理やりでも原則のような形が現れるように式変形します。

【解説】

(1-1)

$$a_n = \int_0^1 x^2(1-x)^n dx$$

この定積分を置換積分で計算します。

$$t = 1 - x \text{ とおきます。 } \frac{dx}{dt} = -1$$

x	$0 \rightarrow 1$
t	$1 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_1^0 (1-t)^2 t^n (-dt) \\ &= \int_0^1 (t^2 - 2t + 1)t^n dt \\ &= \int_0^1 (t^{n+2} - 2t^{n+1} + t^n) dt \\ &= \left[\frac{t^{n+3}}{n+3} - 2 \cdot \frac{t^{n+2}}{n+2} + \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+3} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

[別解] 次は、部分積分で計算してみます。 x^2 を微分する方、 $(1-x)^n$ を積分する方とします。

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x^2(1-x)^n dx = \left[x^2 \cdot \frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 2x \cdot \frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1} dx \\ &= \frac{2}{n+1} \int_0^1 x(1-x)^{n+1} dx \\ &= \frac{2}{n+1} \left\{ \left[x \cdot \frac{-(1-x)^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-(1-x)^{n+2}}{n+2} dx \right\} \\ &= \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} \int_0^1 (1-x)^{n+2} dx \\ &= \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} \left[\frac{-(1-x)^{n+3}}{n+3} \right]_0^1 = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

(1-2) 無限級数の第 n 部分和を S_n とします。つまり、

$$S_n = \sum_{k=1}^n (k+c)(a_k - a_{k+1})$$

題意より、 S_n の極限が存在し無限級数の和2となります。式で表すと、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$$

です。ここで、 $(k+c)(a_k - a_{k+1})$ の和を計算しますが、このままではうまくいきません。そこで、途中の項が相殺されるような形を無理やり作ってみます。

$$(k+c)(a_k - a_{k+1}) = (k+c)a_k - (k+1+c)a_{k+1} + a_{k+1} \cdots \textcircled{1}$$

$b_k = (k+c)a_k$ とおくと、

$$\textcircled{1} = b_k - b_{k+1} + a_{k+1}$$

となり、 $b_k - b_{k+1}$ の和は、途中の項が相殺されて計算できます。

従って、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (k+c)(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1} + a_{k+1}) \\ &= b_1 - b_{n+1} + \sum_{k=1}^n a_{k+1} \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

ここで、

$$b_1 = (1+c)a_1 = (1+c) \cdot \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1+c}{12} \dots \textcircled{3}$$

$$b_{n+1} = \frac{2}{(n+2)(n+3)(n+4)} \dots \textcircled{4}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{k+1} &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{(k+2)(k+3)(k+4)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(k+3)(k+4)} \right\} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{(n+3)(n+4)} \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

③④⑤を②に代入して、

$$S_n = \frac{1+c}{12} - \frac{2}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

ここで、極限をとると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{1+c}{12} + \frac{1}{3 \cdot 4} = 2 \\ \therefore c &= 22 \end{aligned}$$

(2)

【方針】

絶対値が付いている問題は、とにかく絶対値を取らないと計算が進みません。原則に従って、場合分けをして絶対値をはずしていきます。

【解説】

$$|2x+y| + |2x-y| = 2$$

i) $2x + y \geq 0, 2x - y \geq 0$ のとき

$$2x + y + 2x - y = 2$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

ii) $2x + y \geq 0, 2x - y < 0$ のとき

$$2x + y - (2x - y) = 2$$

$$\therefore y = 1$$

iii) $2x + y < 0, 2x - y < 0$ のとき

$$-(2x + y) - (2x - y) = 2$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}$$

iv) $2x + y < 0, 2x - y \geq 0$ のとき

$$-(2x + y) + 2x - y = 2$$

$$\therefore y = -1$$

これらの場合で、グラフを書くと次のようになります。

