苦手分野対策プリント（数2B　格子点）

▼苦手分野対策プリントの2つの目的

１）出題されうる全てのパターンを網羅し、全体観をつかむ（安心する）
受験とは、言い換えると「出題されうるパターンをできるだけ多く習得した人が合格する試験」です。そこで、このプリントではまず、出題されうるパターンをすべて整理し、全体観を掴みます。これだけ頭に入れたらいいんだ、という安心にもつながるでしょう。

２）その手の問題が出題された時に使う、一般的な考え方を習得する（本質をつかむ）
本質がつかめなければ苦手分野から脱却することはできません。本質とは、類題やちょっとひねった問題が出題されても対応できるようになる、その手の問題が出題された時に持っておくべき一般的な考え方のこと。そこで、洗い出した全出題パターンに対し、「この手の問題は、一般に、こう考える」を明記しました。これをきちんと理解することが重要です。

それでは、本題に入りましょう。

＊＊＊

１）出題パターン（2つ）
格子点の問題は、次の2つに限られると考えてください。

a.「平面、直線的な図形」に含まれる格子点　【対応：基礎問題精講132, 標準問題精講135(1)】
b.「立体、直線的な図形」に含まれる格子点　【対応：標準問題精講135(2)】

＜注意点＞
・aの解き方がわかれば、bは解ける。
・上記の他にも「平面、曲線的な図形」に含まれる格子点の数が出題されることもあるが、標準問題精講にも載っていないので本プリントでは触れない。

２）出題パターン別の一般的な考え方

a.「平面、直線的な図形」に含まれる格子点

＜この手の問題を解く時の一般的な考え方＞
① 長方形を考え、対角線上の点の分を引き、2で割った後、対角線上の点の分を加える
② x=k（またはy=k）で場合分けし、数え上げる（ただし、x=kにするのか、y=kにするのかはよく考えて選ぶべし）

＜注意点＞
①は手数が少なく、スマートに解けます。基本的にこの手の問題が出題されたら、こちらの解き方で解けるか考えます。②は、他の問題にも応用が効く解き方なので、こちらもマスターしておいた方がいいです。

＊＊＊

では、具体的に見ていきましょう。標準問題精講135(1)がそうです。

135　格子点の個数

x, y, z を整数とするとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ を 2 次元格子点，xyz 空間内の点 $(x,\ y,\ z)$ を 3 次元格子点という．m, n を 0 以上の整数とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$x\geqq 0$, $y\geqq 0$ かつ $\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y\leqq m$ をみたす 2 次元格子点 $(x,\ y)$ の総数を求めよ．

この手の問題が出たら、まずは「①長方形を考え、対角線上の点の分を引き、2で割った後、対角線上の点の分を加える」を考えます。まさに、解答にある方法ですね。

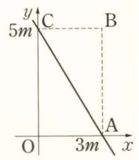
〈 解　答 〉

(1)　$\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(3m,\ 0)$, $\mathrm{B}(3m,\ 5m)$, $\mathrm{C}(0,\ 5m)$ とおくと，与えられた領域は $\triangle\mathrm{OAC}$ の周および内部である．

$\triangle\mathrm{OAC}\equiv\triangle\mathrm{BCA}$ であり，線分 AC 上には

$(0,\ 5m)$, $(3,\ 5(m-1))$, $(6,\ 5(m-2))$, $\cdots$, $(3m,\ 0)$

の $m+1$ 個の格子点がある．



求める 2 次元格子点の総数 S は，長方形 OABC の周および内部にある 2 次元格子点の総数を T，対角線 AC 上の 2 次元格子点の総数を L とおくと

$$S=\frac{1}{2}(T-L)+L=\frac{1}{2}\{(3m+1)(5m+1)-(m+1)\}+(m+1)$$

$$=\frac{1}{2}(15m^2+9m+2)$$

先ほどの方法で基礎問題精講132も解けるのですが、残念ながら解答には「② x=k（またはy=k）で場合分けし、数え上げる」の方法しか書いてありません。

132 格子点の個数

3つの不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $2x+y \leqq 2n$（n は自然数）で表される領域を D とする．

(1) D に含まれ，直線 $x=k$（$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$）上にある格子点（x 座標も y 座標も整数の点）の個数を k で表せ．

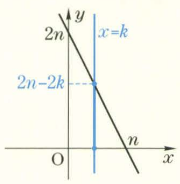
(2) D に含まれる格子点の総数を n で表せ．

精講　$\sum$ 計算の応用例として，格子点の個数を求める問題があります．これは様々なレベルの大学で入試問題として出題されています．

格子点の含まれている領域が具体的に表されていれば図をかいて数え上げることもできますが，このように，n が入ってくると数える手段を知らないと解答できません．その手段とは，**ポイント**に書いてある考え方です．

ポイントによれば，直線 $y=k$ でもできそうに書いてありますが，こちらを使った解答は（**別解**）で確認してください．

解　答



(1) 直線 $x=k$ 上にある格子点は

$(k,\ 0)$, $(k,\ 1)$, $\cdots$, $(k,\ 2n-2k)$

の $(\boldsymbol{2n-2k+1})$ **個**.

注　y 座標だけを見ていくと，個数がわかります．

(2) (1)の結果に，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$ を代入して，すべて加えたものが，D に含まれる格子点の総数．

$$\therefore \sum_{k=0}^{n}(2n-2k+1)$$ ◀等差数列

$$=\frac{n+1}{2}\{(2n+1)+1\}$$ ◀等差数列の和の公式

$$=(\boldsymbol{n+1})^2$$

なので、標準問題精講135の方法で、自分で解けるかやってみると良いでしょう。

＊＊＊

さて、どうして「② x=k（またはy=k）で場合分けし、数え上げる」の方のやり方は優先順位が低いのでしょうか？　それは、直線によっては、場合分けをして数え上げなければならないからです。まさに、標準問題精講135の「研究」、基礎問題精講132の「別解」で登場するように、です。

＜標準問題精講135「研究」＞

研究 (1) $x=$(一定) となる直線上の格子点を数えてみる．$1\leqq k\leqq m$ をみたす k に対し，△OAB 内の

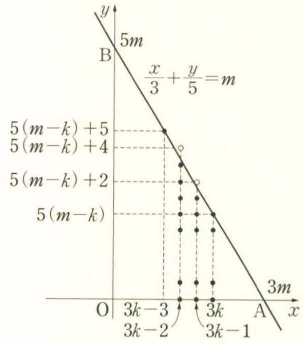
$x=3k$ 上にある格子点は，　$5(m-k)+1$ 個

$x=3k-1$ 上にある格子点は，$5(m-k)+2$ 個

$x=3k-2$ 上にある格子点は，$5(m-k)+4$ 個

であるから，2 次元格子点の総数は

$$\begin{aligned}
&(5m+1)+\sum_{k=1}^{m}\{5(m-k)+1\}\\
&\qquad+\sum_{k=1}^{m}\{5(m-k)+2\}\\
&\qquad+\sum_{k=1}^{m}\{5(m-k)+4\}\\
&=(5m+1)+\sum_{k=1}^{m}\{15(m-k)+7\}\\
&=(5m+1)+\sum_{j=0}^{m-1}\{15j+7\}\\
&=(5m+1)+15\frac{(m-1)m}{2}+7m\\
&=\frac{1}{2}(15m^2+9m+2)
\end{aligned}$$



＜基礎問題精講132「別解」＞

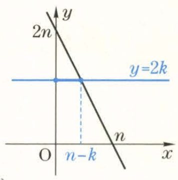
(別解) 直線 $y=2k$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 上の格子点は $(0,\ 2k)$，$(1,\ 2k)$，$\cdots$，$(n-k,\ 2k)$ の $(n-k+1)$ 個．

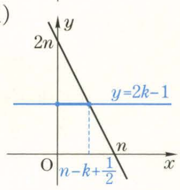
また，直線 $y=2k-1$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 上の格子点は

$(0,\ 2k-1)$，$(1,\ 2k-1)$，$\cdots$，$(n-k,\ 2k-1)$

の $(n-k+1)$ 個．よって，格子点の総数は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)+\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\\
&=2\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)+(n+1)\\
&=n(n+1)+(n+1)\\
&=(n+1)(n+1)\\
&=(n+1)^2
\end{aligned}$$





注 $y=2k$ と $y=2k-1$ に分ける理由は直線 $y=k$ と $2x+y=2n$ の交点を求めると，$\left(n-\dfrac{k}{2},\ k\right)$ となり，$n-\dfrac{k}{2}$ が k の偶奇によって整数になる場合と整数にならない場合があるからです．

ここで一つ大事なことをお伝えします。基礎問題精講132は、x=kで考えた時は場合分けが必要なかったのに、y=kでは場合分けが必要になっていたことに気づいたでしょうか？

このように、「② x=k（またはy=k）で場合分けし、数え上げる」では、x=kで考えるか、y=kで考えるかで、場合分けをしなくても済む場合があります。

x=kで考えた場合、どんなkに対しても、直線x=k上にある格子点の数は「2n-k+1」で表されました。一方、y=kで考えた場合、kが偶数か奇数かで直線y=k上にある格子点の数は違ってきます。そのため、偶数の場合と奇数の場合で場合分けをする必要があるのです。場合分けをして解くこともできるわけですが、計算が煩雑になったりしてミスの原因となりますので、x=kで考える、ということを見抜くのが一つ大きなポイントとなります。

＜類題紹介＞（実際に手を動かす必要はありません）

ここまで勉強してきた内容をおさらいできる、良い類題があったので紹介します。考え方の流れを整理してみてください。

重要 例題 97 　基本 88

n は自然数とする。座標平面上の 3 点 $(0,\ 0)$, $(2n,\ 0)$, $(0,\ n)$ を頂点とする三角形の周および内部にある格子点（x 座標，y 座標がともに整数である点）の個数を求めよ。

CHART & SOLUTION

格子点の個数

1 $\sum k$, $\sum k^2$ の利用　2 図形の特徴を利用

三角形の周および内部にある格子点の個数は，直線 $y=0$, $y=1$, ……, $y=n$ 上にある格子点の個数の和である。

ゆえに，直線 $y=k$ 上の格子点の個数を k の式で表し，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$（$k$ の式）を求める。

解答

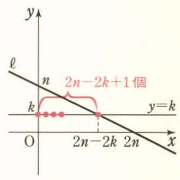
2 点 $(2n,\ 0)$, $(0,\ n)$ を結ぶ直線 ℓ の方程式は　$x+2y=2n$

直線 $y=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ と直線 ℓ との交点の座標は $(2n-2k,\ k)$ であるから，題意に適する格子点のうち，直線 $y=k$ 上にある点の個数は

$2n-2k+1$

したがって，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}(2n-2k+1)=-2\sum_{k=0}^{n}k+(2n+1)\sum_{k=0}^{n}1$$
$$=-n(n+1)+(2n+1)(n+1)=(\boldsymbol{n+1})^2$$



← $\dfrac{x}{2n}+\dfrac{y}{n}=1$

← $x+2k=2n$ から $x=2n-2k$

← 点 $(0,\ k)$ も含むので「$2n-2k+1$」

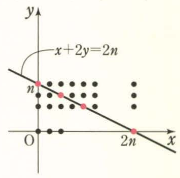
← $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k=\sum_{k=1}^{n}k$
$0+1+2+3+\cdots\cdots+n$
$=1+2+3+\cdots\cdots+n$
$=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

別解　直線 $x+2y=2n$ 上の格子点は，点 $(0,\ n)$, $(2,\ n-1)$, ……, $(2n,\ 0)$ の $(n+1)$ 個ある。

4 点 $(0,\ 0)$, $(2n,\ 0)$, $(2n,\ n)$, $(0,\ n)$ を頂点とする長方形の周および内部にある格子点は $(n+1)(2n+1)$ 個ある。

ゆえに，求める格子点の個数は

$$(n+1)+\frac{1}{2}\{(2n+1)(n+1)-(n+1)\}=(\boldsymbol{n+1})^2$$



← (対角線上の点) $+\dfrac{1}{2}$\{(長方形上の点) $-$(対角線上の点)\}

別解として後に紹介されてはいますが、まずは「① 長方形を考え、対角線上の点の分を引き、2で割った後、対角線上の点の分を加える」の方のやり方で解けるか確認します。実際にこれでシンプルに答えを導けています。

解答では先に「② x=k（またはy=k）で場合分けし、数え上げる」の方法も紹介しています。この問題では、x=kで数え上げると、kが偶数の時と奇数の時で、直線x=k上にある格子点の数が変わってしまうことに気づく必要があります（傾きが1/2なので）。そこで、y=kを考えます。y=kであれば、kがどんな整数だろうと、解答にある通り、2n-2k+1個の格子点があるのです。

わかりましたでしょうか？

b. 「立体、直線的な図形」に含まれる格子点

＜この手の問題を解く時の一般的な考え方＞

特定の平面上（往々にしてz=kの平面上）にある格子点の数を「a.」の方法で求め、kの取りうる範囲で足し合わせる（Σを計算する）。

＜注意点＞

「a. 「平面、直線的な図形」に含まれる格子点」のやり方が分かっていれば問題ないはず。立体の体積を積分を用いて求めるのと同じ要領でやれば、答えは求まります。

＜詳細＞

この手の問題の解き方は、標準問題精講135(2)以上でも以下でもありません。

①特定の平面（立体の形次第だが、z=kの平面などz軸に沿った平面である事が多い）
②zの取りうる範囲で足し合わせる（Σの計算をする）

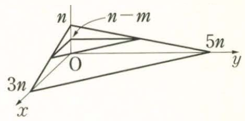
というステップで解く事ができます。

135 格子点の個数

(2) $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ かつ $\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y+z \leqq n$ をみたす3次元格子点 $(x,\ y,\ z)$ の総数を求めよ． （名古屋市大）

〈 解　答 〉

(2) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y \leqq n-z$ において，
z ($z=n,\ n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 0$) を固定し，
$m=n-z$ ($m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$) とおくと，



$\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y \leqq m$ となる．これをみたす2次元格子点 $(x,\ y)$ の総数は(1)より

$$\frac{1}{2}(15m^2+9m+2)$$

であるから，求める3次元格子点の総数は

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{2}(15m^2+9m+2)$$
$$=\frac{15}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{9}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)^2(5n+2)$$

▼まとめ

・出題パターンと、一般的な考え方

a.「平面、直線的な図形」に含まれる格子点　【対応：基礎問題精講132, 標準問題精講135(1)】
① 長方形を考え、対角線上の点の分を引き、2で割った後、対角線上の点の分を加える
② x=k（またはy=k）で場合分けし、数え上げる（ただし、x=kにするのか、y=kにするのかはよく考えて選ぶべし）

※まずは①の方法でできるかを確認する。

b.「立体、直線的な図形」に含まれる格子点　【対応：標準問題精講135(2)】
　特定の平面上（往々にしてz=kの平面上）にある格子点の数を「a.」の方法で求め、kの取りうる範囲で足し合わせる（Σを計算する）。