

Q. (標準問題精講 3 P85 例題 36)

解答で、 $z > 0$  だから  $\frac{dz}{dx}$  の符号が  $\log x - \log(1-x)$  の符号と一致するのはわかりませんが、 $\log x$  が増加関数だからと断る理由がわかりません。

A.

$\frac{dz}{dx}$  の符号が  $2x-1$  の符号と一致する理由を説明し、どの式変形で  $\log x$  が増加関数であることを使用しているか説明いたします。

まず、

$$\frac{dz}{dx} = z\{\log x - \log(1-x)\}$$

であり、 $z > 0$  ですので、もし  $\frac{dz}{dx}$  の符号が正であれば

$$z\{\log x - \log(1-x)\} > 0$$

$$\log x - \log(1-x) > 0$$

$$\log x > \log(1-x) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成立します。ここで、 $\log x$  は増加関数なので

$$x > 1-x \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となり、

$$2x - 1 > 0$$

ですので、 $2x-1$  の符号も正であることが分かります。また、以上の議論で不等号の向き

を全て逆転すると、 $\frac{dz}{dx}$  の符号が負であれば  $2x-1$  の符号も負となりますので、 $\frac{dz}{dx}$  の符号は

$2x-1$  の符号と一致することが分かります。

以上のように、 $\textcircled{1}$ から $\textcircled{2}$ を導く際に  $\log x$  が増加関数であることを使用していると考えられます。自然対数の底は $e$ であり、 $e > 1$  ですので、 $\textcircled{1}$ から $\textcircled{2}$ が導かれることはほぼ自明で

す。 $\frac{dz}{dx}$  の符号と  $2x-1$  の符号が一致することさえ納得できれば、 $\log x$  が増加関数である

ことに特にこだわる必要はないと思います。